Aufgabe: Stelle $x^4 + 1$ als Produkt zweier ganz rationaler Terme mit reellen Koeffizienten dar.

Lösung: Wir betrachten die Gleichung $x^4 + 1 = 0$. Diese besitzt nach dem Hauptsatz der Algebra[1] genau 4 Nullstellen in $\mathbb{C}$. Diese sind auch mit der *komplexen* Wurzel $\sqrt[4]{-1}$ darstellbar. Die 4 Lösungen liegen auf einem Kreis mit Radius 1 und bilden ein gleichmäßiges n-Eck, also für $n = 4$ ein Quadrat. In Abbildung 1 sind die Lösungen in der komplexen Ebene geometrisch dargestellt.

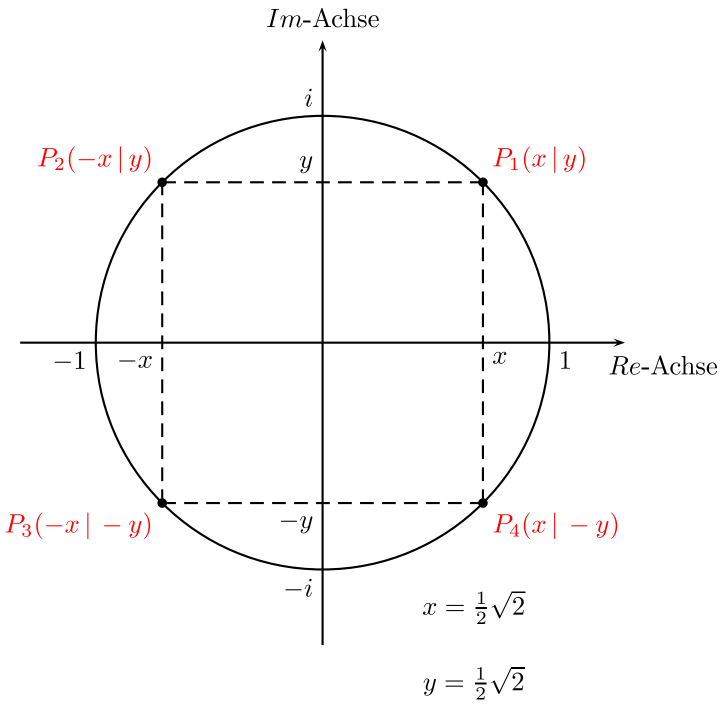

Abbildung 1: Quadrat im Einheitskreis

Die Lösungen sind

$$\sqrt[4]{-1} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2};\, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2};\, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2};\, \frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Fundamentalsatz_der_Algebra

Beispiel: [2]

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4+4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\cdot i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+6\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\left(i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\\ &\quad+4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\left(i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\\ &= \frac{4}{16}+\frac{16i}{16}+\frac{-24}{16}+\frac{-16i}{16}+\frac{4}{16}=-1\,.\end{aligned}$$

Damit hat x^4+1 die Faktorzerlegung:

$$x^4+1=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

oder zur Verdeutlichung mit Klammern in einer angepassten Reihenfolge, damit die Formel $(a+b)\,(a-b)=a^2-b^2$ besser erkennbar ist:

$$\begin{aligned}&=\left(\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &\quad\cdot\left(\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &=\left(\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)\cdot\left(\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)\\ &=\left(x^2-2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\\ &=\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2+2x+1\right)\,.\end{aligned}$$

Tipp: Weitere mathematische und physikalische Schmankerl findet man auch unter der Adresse http://toblog.photozeichen.de.
11.01.2018 tobsoft

[2] Beachte: $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$