Definitionen zur Differenzierbarkeit

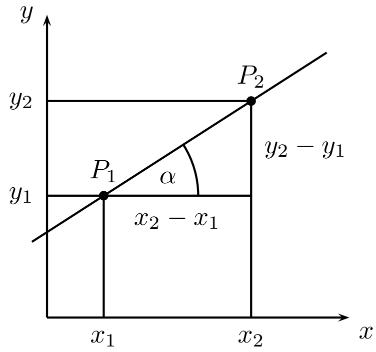
1. **Steigung**

   $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ legen eine Gerade fest. Der Quotient $(x_1 \neq x_2)$

   $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

   heißt Steigung der Geraden.

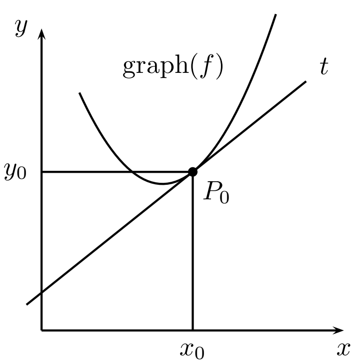
2. **Steigungswinkel**

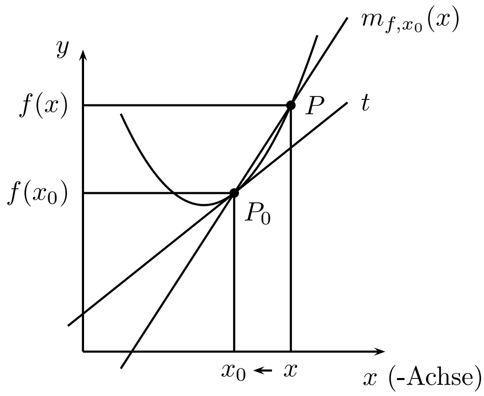


   Der Steigungswinkel $\alpha \neq 90°$ ist der Winkel, den die Gerade mit der (pos.) x-Achse bildet. Genauer:

   $$m = \tan\alpha;\ \alpha \neq 90°;\ 0° \leq \alpha < 180°$$

3. **Tangente**





   Unter einer Tangente t an den Graph einer Funktion f in P_0 verstehen wir diejenige Gerade durch P_0, die die gleiche Steigung hat wie der Graph von f in P_0.

4. **Steigung des Graphen von f in $P_0(x_0|y_0)$**

   a) Die Funktion m_{f,x_0} mit

   $$m_{f,x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};\ x \neq x_0$$

   heißt Sekantensteigungsfunktion.

   b) Die reelle Zahl

   $$\lim_{x \to x_0} m_{f,x_0}(x)$$

   heißt – falls es sie gibt – Steigung des Graphen von f in $P_0(x_0|y_0)$.

5. **Differenzierbarkeit**

Von allen Funktionen betrachten wir nur diejenigen, bei denen der Grenzwert 4b existiert.

Vor.: f sei eine reellwertige Funktion; $D_f \subseteq \mathbb{R}$; $x_0 \in D_f$; (x_0 Häufungspunkt von D_f).

a) Def.: f differenzierbar in $x_0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$.

b) Falls f differenzierbar in x_0, so heißt die durch $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ bestimmte reelle Zahl „Wert der 1. Ableitung von f in x_0" und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet. Daher

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

c) Weitere Schreibweisen – insbesondere für Physiker:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}\bigg|_{x_0} = \frac{d}{dx} f\bigg|_{x_0}$$

6. **Rechts- und linksseitige Differenzierbarkeit**

a) Def.: f rechtsseitig differenzierbar in x_0

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $h \to 0$: h durchläuft beliebige Nullfolgen mit nur positiven Gliedern, so dass stets $(x_0 + h) \in D_f$.

b) Def.: f linksseitig differenzierbar in x_0

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $h \to 0$: h durchläuft beliebige Nullfolgen mit nur positiven Gliedern, so dass stets $(x_0 - h) \in D_f$.

c) Den Zusammenhang zwischen rechts- und linksseitiger Differenzierbarkeit und der Differenzierbarkeit beschreibt der nachstehende

Satz: f differenzierbar in $x_0 \Longleftrightarrow f$ linksseitig differenzierbar in x_0 *und* f rechtsseitig differenzierbar in x_0 *und* die entsprechenden Grenzwerte sind gleich.