1. Potenzen mit natürlichem Exponenten
   a) Für $a \in \mathbb{R}$ [1] und $n \in \mathbb{N}$ [2] mit $n > 1$ definiert man $a^n = \underbrace{a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$.
      Ferner gelte $a^1 = a$.
   b) Besser ist es, rekursiv zu definieren: $a^1 = a$ und $a^{n+1} = a^n \cdot a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   c) Beispiele:
      i. $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$;
      ii. $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$.
2. Potenzgesetze für Potenzen mit natürlichen Exponenten
   a) Es gelten folgende Potenzgesetze für $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ (ohne Beweis):
      i. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; Produkt von Potenzen mit gleicher Basis.
      ii. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$; Produkt von Potenzen mit gleichem Exponenten.
      iii. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; Potenzen von Potenzen.
      iv. $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{, falls } m > n \\ 1 & \text{, falls } m = n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{, falls } m < n \end{cases}$, falls $a \neq 0$.
      v. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, falls $b \neq 0$.
   b) Beispiel zu 2(a)iv:
      i. $\dfrac{4^5}{4^2} = \dfrac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4} = 4^3 = 4^{5-2}$;
      ii. $\dfrac{4^3}{4^3} = \dfrac{4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4} = 1$;
      iii. $\dfrac{4^2}{4^5} = \dfrac{4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \dfrac{1}{4^3} = \dfrac{1}{4^{5-2}}$.
3. Potenzen mit ganzzahligem Exponenten
   a) Die Fallunterscheidung aus 2(a)iv kann durch eine neue Schreibweise entfallen, wenn man für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert:
      $$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{und} \quad a^0 = 1 \;.$$
      Damit ist die Potenz auf $\mathbb{Z}$ [3] erweitert. Nachteil: im allgemeinen gilt nur noch $a \neq 0$. Es gelten dann die Gesetze 2(a)i, 2(a)ii und 2(a)iii (ohne Beweis).
   b) Ferner gilt dann auch ($a \neq 0$; $m, n \in \mathbb{N}$):
      i. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, falls $m > n$;
      ii. $1 = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^0$, falls $m = n$;
      iii. $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$, falls $m < n$.
      Also in allen drei Fällen $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Wegen $\dfrac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$ ist also nur noch 2(a)i erforderlich. Entsprechend läßt sich 2(a)v auf 2(a)ii und2(a)iii zurückführen (hier nicht ausgeführt).
      Fazit:

[1] $\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen
[2] $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$
[3] $\mathbb{Z} = \{\cdots - 4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$

Es gelten die drei Potenzgesetze 2(a)i, 2(a)ii und2(a)iii für alle $m, n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$.

4. Potenzen mit gebrochenen Exponenten

   a) Nun ist $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ oder auch $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2$. *Wenn die drei oben genannten Potenzgesetze beibehalten werden sollen*, liegt es nahe zu schreiben $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, denn $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$ bzw. $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$. Daher definiert man

   $$a^{\frac{z}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^z \quad (a \in \mathbb{R}, a > 0, n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}) \; .$$

   b) Es gelten wieder die drei Potenzgesetze (ohne Beweis) und man kann im Exponenten ganz normal mit Brüchen rechnen.

   c) Damit ist etwa

   $$3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{3}} \, .$$

   Oder auch so:

   $$3^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{-1}{2}} = \sqrt[2]{3}^{\,-1} = \frac{1}{\sqrt[2]{3}} \, .$$

25.06.2020 tobsoft (Original für Schüler vom 06.11.1997)