Ein Weg zu den komplexen Zahlen

Axel Tobias, StD i. R.

18. Juni 2020

Inhaltsverzeichnis

1. Vorbemerkungen

Aus Rückmeldungen von Schülern vom Beginn eines math.-naturwissenschaftlichen Studiums[1] geht hervor, dass Grundkenntnisse der Eigenschaften komplexer Zahlen gewünscht werden. In meinen ersten Leistungskursen in den 1980er Jahren hatte ich die (zeitliche) Freiheit, dieses Thema zu behandeln. Es ging mir dabei nicht um Vollständigkeit, sondern um den Einführungsprozess, sozusagen die mathematische Schöpfung von Objekten mit einer bestimmten Eigenschaft aus dem, was man bis zu einem bestimmten Punkt gelernt hat. In diesem Zusammenhang wird auch deutlich, dass die Erfüllung einer spezifischen Eigenschaft, etwa ein negatives Quadrat zu konstruieren, mit Einschränkungen an anderer Stelle einhergeht.

Zu Beginn meiner Betrachtungen steht eine Übersicht über die algebraischen Eigenschaften der verschiedenen Zahlenmengen. Danach wird für die Lösung einer in der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ nicht lösbaren Gleichung eine Körpererweiterung konstruiert. An diesem Beispiel wird die Vorgehensweise für eine entsprechende Erweiterung der reellen Zahlen erkennbar, wenn man Zahlen sucht, deren Quadrat negativ ist.

Danach werden verschiedene Eigenschaften der komplexen Zahlen zusammengestellt und begründet. Einige geometrische Betrachtungen und Rechenbeispiele folgen ebenfalls.

Es geht hier nicht um Vollständigkeit der Ausführungen, sondern um eine Möglichkeit, die komplexen Zahlen in einer 9. (oder 10. (G9)) Jahrgangsstufe einzuführen. Im Differenzierungsbereich WPII der Klassen 8, 9 (bzw. 9, 10 (G9)) habe ich Gelegenheit gehabt, die vorgestellten Ideen auszuprobieren. Beispielaufgaben sind als Übungsaufgaben anzusehen. Aufgaben für eine zweistündige (90 Minuten) Klassenarbeit findet man im Anhang.

Die Vektorraumeigenschaften und das Umformungen von Matrizen wurden in der Sekundarstufe II thematisiert. Beispiele dazu sind im Abschnitt Gleichungssysteme angegeben. Vielfach finden sich derartige Beispiele auch auf den ersten Übungsblättern der Einführungsvorlesungen an den Hochschulen.

2. Übersicht über die Zahlenmengen

Die Zahlenmengen, die man in der Sekundarstufe I kennenlernt, sind die natürlichen und die ganzen Zahlen, darüber hinaus die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen. Damit erschöpft sich die Kenntnis der Zahlenwelt. Mitunter hört man noch von anderen Zahlen, die man aber offensichtlich (in der Schule) nicht „wirklich“ benötigt. Die Erfahrung zeigt aber, dass bereits die Definition dieser vier Zahlbereiche nicht immer bekannt ist. Daher folgen die Definitionen hier noch einmal.

[1] Eine eher physikalische Darstellung und Anwendung der komplexen Zahlen findet man bei [1].

2.1. Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen benötigt man zum Zählen. Wenn man etwa die Schüler einer Klasse zählt, so bestimmt man eine umkehrbar eindeutige Funktion zwischen den Personen und einem ersten Abschnitt der natürlichen Zahlen[2]:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,\dots\} \,.$$

Folgende Eigenschaften sollte man kennen:

1. Die natürlichen Zahlen starten in der Schule im Allgemeinen bei 1, in der Hochschule in der Regel bei 0. Das ist keine Glaubensfrage, sondern z. B. eine Erleichterung der Betrachtungen mit natürlichen Zahlen im Nenner. Vielleicht ist in der Schule diese Erklärung ganz nützlich: Wenn man ein Klassenzimmer öffnet und es ist kein Schüler drin, dann gibt es nichts zu zählen.

   Bei einer mengentheoretischen Definition der natürlichen Zahlen beginnt man allerdings mit der leeren Menge $\emptyset = \{\,\}$, deren Elementezahl 0 ist. So könnte es ebenfalls in der Schule erklärt werden.
2. Startet man bei 1, so ergeben sich die folgenden Zahlen durch „Nachfolgerbildung“ $n' = n+1$, d. h. die auf n nachfolgende Zahl n' ist stets die um 1 erhöhte Zahl $n+1$.
3. Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen und es gibt eine kleinste, nämlich 1 (oder eben 0). Genauer gilt sogar: jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element (Minimum). [3]

2.2. Ganze Zahlen

Die ganzen Zahlen benötigt man, damit man die Addition sinnvoll durchführen kann. Während man in $\mathbb{N}$ zwar addieren kann – die Summe zweier natürlicher Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl –, so kann man die Rechnung aber nicht rückgängig machen, da die „Gegenzahlen“ fehlen. Selbst $32-14$ lässt sich eigentlich nicht rechnen, da $32-14 = 32+(-14)$ bedeutet, aber $-14 \notin \mathbb{N}$. Das verrät man den Schülern an dieser Stelle nicht. Bei $14-32$ geht aber schon nichts mehr.

Die ganzen Zahlen enthalten die natürlichen Zahlen, deren Gegenzahlen und die Zahl Null:

$$\mathbb{Z} = \{\dots,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\dots\} \,.$$

Folgende Eigenschaften sollte man kennen:

1. Es gibt unendlich viele ganze Zahlen, aber es gibt keine kleinste.
2. Es gibt nicht mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen, denn man kann die ganzen Zahlen „abzählen“:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4	5	...

3. In der Menge $\mathbb{Z}$ kann man alle bekannten Rechenoperationen bezüglich der Addition (+) durchführen. Dafür sorgen die nachstehend aufgeführten Rechengesetze für $(\mathbb{Z},+)$:

$$(a+b)+c = a+(b+c) \tag{A}$$
$$a+b = b+a \tag{K}$$
$$a+0 = a \tag{N}$$
$$a+(-a) = 0 \tag{I}$$

   Erläuterungen:

   (A) Das **Assoziativgesetz** besagt, dass mehrgliedrige Summen beliebig geklammert werden können; grundsätzlich kann man die Klammern weglassen.

[2] Die drei Punkte sind in der Mathematik eigentlich nicht korrekt. Eine genauere Definition der natürlichen Zahlen ist aber hier nicht das Thema dieses Artikels. In [2] kann man mehr darüber lesen.

[3] Diese Aussage ist äquivalent zum Satz über vollständige Induktion; siehe [3].

(K) Das **Kommutativgesetz** besagt, dass das Ergebnis von der Reihenfolge der Summanden unabhängig ist.

(N) Das Gesetz vom **neutralen Element** heißt genauer: Es gibt ein Objekt (die Zahl 0) in $\mathbb{Z}$, so dass für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt: $a + 0 = a$. Die Zahl 0 ist das neutrale Element bezüglich der Addition.

(I) Das Gesetz vom **inversen Element** heißt genauer: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gibt es ein Objekt (die Gegenzahl $-a$) in $\mathbb{Z}$, so dass: $a + (-a) = 0$. Die Zahl $-a$ ist das inverse Element zu a bezüglich der Addition.

Die Subtraktion wird nicht benötigt, da $a - b = a + (-b)$ bedeutet: Die Subtraktion ist die Addition der Gegenzahl.

Man beachte schließlich den Unterschied zwischen „es gibt ein ... für alle ...“ und „für alle ... gibt es ein ...“. Man kann sich das mit „für alle Jungen gibt es eine Freundin“ leicht klarmachen.

Eine Menge mit einer Rechenoperation, in der die oben genannten Rechengesetze A, K, N und I gelten, nennt man **kommutative Gruppe**. Dabei darf allerdings die Rechenoperation nicht aus der zugrundeliegenden Menge herausführen, was bei den ganzen Zahlen allerdings gegeben ist; man hatte sie gerade so konstruiert.

2.3. Rationale Zahlen

Die rationalen Zahlen benötigt man, damit man die Division sinnvoll durchführen kann. Während man in $\mathbb{Z}$ zwar addieren kann – die ganzen Zahlen bilden bezüglich der Addition $(+)$ eine kommutative Gruppe –, so kann man nicht vollständig multiplizieren. Zwar ist auch wieder das Produkt zweier ganzer Zahlen eine ganze Zahl, die Multiplikation lässt sich aber nicht rückgängig machen, da die „Brüche“ fehlen. Selbst $28 : 14$ lässt sich eigentlich nicht rechnen, da $28 : 14 = 28 \cdot \frac{1}{14}$ bedeutet, aber $\frac{1}{14} \notin \mathbb{Z}$. Trotzdem kann man sich hier doch noch ganz gut behelfen, denn $28 : 14 = 2$. Bei $14 : 28$ geht das aber nicht mehr.

Die rationalen Zahlen bestehen aus allen Bruchzahlen[4] mit einer ganzen Zahl im Zähler und einer natürlichen Zahl im Nenner:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \,\middle|\, z \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N} \right\} .$$

Folgende Eigenschaften sollte man kennen:

1. Es gibt unendlich viele rationale Zahlen, aber es gibt nicht mehr rationale Zahlen als natürliche Zahlen, denn man kann die rationalen Zahlen „abzählen“. Die Idee sei hier kurz dargestellt. [5]

   Betrachtet man die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} ,$$

   so kann man auf nachstehende Weise alle rationalen Zahlen mit einer natürlichen Zahl versehen:

[4] Bruchzahlen und Brüche kann man identifizieren, obwohl die Begriffe etwas anderes bedeuten. Eine Bruchzahl $\left[\frac{z}{n}\right]$ stellt die Menge aller Brüche vom gleichen Wert dar. Also etwa $\left[\frac{2}{3}\right] = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \dots\right\}$. Der Name einer Bruchzahl $\left[\frac{z}{n}\right]$ wird von einem Repräsentanten der enthaltenen Brüche vergeben. Man wählt z. B. den vollständig gekürzten Bruch. Man könnte aber auch jeden anderen Bruch zur Kennzeichnung verwenden. Letztlich kann man die Bruchzahlen mit den Brüchen identifizieren und schreibt daher einfach $\frac{z}{n}$ statt $\left[\frac{z}{n}\right]$.

[5] In [4] findet man eine recht übersichtliche Darstellung der Idee.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_{11}	a_{21}	a_{12}	a_{13}	a_{22}	a_{31}	a_{41}	a_{32}	a_{23}	a_{14}	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	...

Beginnt man noch mit der Zahl 0 und wechselt nach jedem Eintrag das Vorzeichen, so wird der Abzählprozess klar.

2. Offenbar sind die ganzen Zahlen und damit die natürlichen Zahlen in den rationalen Zahlen enthalten, da sich jede ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ als Bruch darstellen lässt.

$$z = \frac{z}{1}\,.$$

Es gilt also

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}\,.$$

3. In der Menge $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ kann man alle bekannten Rechenoperationen bezüglich der Multiplikation $(\cdot)$ durchführen. Dafür sorgen die nachstehend aufgeführten Rechengesetze für $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \tag{A}$$
$$a \cdot b = b \cdot a \tag{K}$$
$$a \cdot 1 = a \tag{N}$$
$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \tag{I}$$

Erläuterungen:

(A) Das **Assoziativgesetz** besagt, dass mehrgliedrige Produkte beliebig geklammert werden können; grundsätzlich kann man die Klammern weglassen.

(K) Das **Kommutativgesetz** besagt, dass das Ergebnis von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig ist.

(N) Das Gesetz vom **neutralen Element** heißt genauer: Es gibt ein Objekt (die Zahl 1) in $\mathbb{Q}^*$, so dass für alle $a \in \mathbb{Q}^*$ gilt: $a \cdot 1 = a$. Die Zahl 1 ist das neutrale Element bezüglich der Multiplikation.

(I) Das Gesetz vom **inversen Element** heißt genauer: Für alle $a \in \mathbb{Q}^*$ gibt es ein Objekt (den Kehrwert $\frac{1}{a}$) in $\mathbb{Q}^*$, so dass: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Die Zahl $\frac{1}{a}$ ist das inverse Element zu a bezüglich der Multiplikation.

Die Division wird nicht benötigt, da $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$ bedeutet: Die Division ist die Multiplikation mit dem Kehrwert.

Man erkennt: Die rationalen Zahlen (ohne Null) $\mathbb{Q}^*$ bilden bezüglich der Multiplikation eine kommutative Gruppe.

4. Aus den Zahlen zum Zählen hat man also durch entsprechende Erweiterung Rechenbereiche gefunden, in denen man „wie gewohnt“ rechnen, also addieren und multiplizieren kann. Allerdings stehen die Gruppeneigenschaften aus Punkt 3 (Seite 3) und Punkt 3 (Seite 5) zunächst noch isoliert nebeneinander. Die gruppenspezifische Rolle der Zahlen 0 und 1 wird zwar deutlich, aber einige Gesetze aus Punkt 3 (Seite 5) gelten auch für die Zahl 0. Dies soll im nächsten Abschnitt 3.1 ab Seite 7 betrachtet werden.

2.4. Reelle Zahlen

Die reellen Zahl unterscheiden sich von der *algebraischen* Struktur her nicht von den rationalen Zahlen. Dem normalen Benutzer, zumal dem, der mit den endlich vielen Zahlen eines Taschenrechners auskommt, wird ohne Weiteres kein Unterschied zwischen den Zahlenmengen bewusst.

Es gibt allerdings *erhebliche* Unterschiede. Diese sind topologischer Natur. Da die Eigenschaften der reellen Zahlen nicht einfach zu begründen sind, weil sie weitergehende Begriffsbildungen erfordern, möchte ich hier nur die wesentlichen Punkte nennen.

Ersten Kontakt mit der Unzulänglichkeit der rationalen Zahlen zur Beschreibung von Zahlen mit gewissen Eigenschaften bietet etwa die Fragestellung „Welche (positive) Zahl ergibt zum Quadrat genau die Zahl 2?“. Man sucht also die positive Lösung der Gleichung $x^2 = 2$.

Verhältnismäßig leicht kann man feststellen, dass es keine Bruchzahl gibt, die die Gleichung erfüllt. Einleuchtend ist ferner, dass diese „neuen“ Zahlen eine nicht-abbrechende, nicht-periodische Dezimalbruchdarstellung haben müssen, denn alle Bruchzahlen lassen sich in einer abbrechenden oder schließlich periodischen Dezimalbruchdarstellung angeben. Beispiele:

$$\frac{1}{25} = 0{,}04 \tag{1}$$

$$\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857} \tag{2}$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots \tag{3}$$

$$\text{genauer:} \qquad 1{,}4142135623 < \sqrt{2} < 1{,}4142135624 \tag{4}$$

Erläuterungen:

(1) 25 ein Teiler von 100; daher bricht das Divisionsverfahren 1 : 25 ab (Rest 0).

(2) 7 ist kein Teiler einer Potenz von 10. Die Division muss also in einer Periode enden, denn spätestens nach 6 Schritten sind bei der Division 1 : 7 alle möglichen Reste (1, 2, 3, 4, 5 oder 6) verbraucht.

(3) Als **irrationale** (nicht-rationale) Zahl besitzt $\sqrt{2}$ weder eine periodische noch eine abbrechende Dezimalbruchdarstellung. Daher ist es nicht möglich, diese Zahl in dieser Weise zu notieren.

(4) Es ist aber möglich, die Zahl durch eine Folge von Ungleichungsketten zu beschreiben – sogenannte **Intervallschachtelungen** – letztlich also durch Grenzprozesse rationaler Zahlen.

Eine genauere Betrachtung der Definitionen kann ich hier nicht weiter verfolgen, ohne das Ziel komplexe Zahlen aus dem Blick zu verlieren. Ich möchte jedoch noch auf nachstehende wichtige Eigenschaften und Zusammenhänge hinweisen, die für ein weitergehendes Verständnis für die reellen Zahlen erforderlich erscheinen.

1. Reelle Zahlen kann man verstehen als Menge der durch eine Intervallschachtelung beschreibbaren Zahlen, sogenannte innere Zahlen einer Intervallschachtelung:
$$\mathbb{R} = \left\{ x \,\middle|\, x \text{ ist innere Zahl einer Intervallschachtelung} \right\} .$$

2. Da sich die rationalen Zahlen ebenfalls über Intervallschachtelungen beschreiben lassen, ergibt sich folgende Teilmengenbeziehung:
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} .$$

3. Die nicht-rationalen (irrationalen) Zahlen erweitern die rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen:
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \left\{ x \,\middle|\, x \text{ ist Irrationalzahl} \right\} .$$

4. Das Standardbeispiel für eine Irrationalzahl ist natürlich $\sqrt{2}$. Sehr schnell stellt man fest, dass es unendlich viele Irrationalzahlen geben muss. Nicht mehr schnell einsichtig scheint die Aussage, dass die Irrationalzahlen alleine schon „mehr“ Zahlen darstellen als die rationalen Zahlen. Das ist genau der Zuwachs an (topologischen) Eigenschaften der reellen Zahlen gegenüber den rationalen Zahlen:

a) Die Menge der rationalen Zahlen ist **dicht**, d. h. zwischen je zwei rationalen Zahlen liegt eine weitere – z. B. der Mittelwert der gewählten rationalen Zahlen.

   Das bedeutet aber keineswegs, dass man über diese Vorstellung alle denkbaren Zahlen erwischen kann, denn die irrationalen Zahlen bleiben außen vor: es bleiben noch unendlich viele „Löcher“ übrig, die sogar noch häufiger sind als die der dicht liegenden rationalen Zahlen.

b) Durch die Konstruktion mit den Intervallschachtelungen weden alle Lücken geschlossen; die Menge der reellen Zahlen ist **vollständig**.

c) Eine Begründung der erwähnten Überabzählbarkeit der reellen Zahlen, (d. h., man kann sie nicht mittels der natürlichen Zahlen nummerieren) kann man unter [5] als Cantors Diagonalargument nachlesen. [6]

3. Der Körper der rationalen Zahlen

3.1. Die Addition rationaler Zahlen

Die Rechengesetze der ganzen Zahlen für die Addition (vergleiche Punkt 3 auf Seite 3) gelten auch in der Menge der rationalen Zahlen. Es sind die üblichen Rechengesetze, die man im Rahmen der Bruchrechnung gelernt hat.

Zum Beipiel gilt für das Kommutativgesetz (K):

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{n_1}+\frac{z_2}{n_2} &= \frac{z_1n_2+z_2n_1}{n_1n_2}\\ &= \frac{z_2n_1+z_1n_2}{n_2n_1}\\ &= \frac{z_2}{n_2}+\frac{z_1}{n_1}\,.\end{aligned}$$

Die Kommutativgesetze der ganzen Zahlen bezüglich der Addition und ebenfalls auch der Multiplikation übertragen sich auf die Bruchzahlen. Entsprechend kann man das Assoziativgesetz nachrechnen.

Für das neutrale Element etwa gilt:

$$\begin{aligned}\frac{z}{n}+0 &= \frac{z}{n}+\frac{0}{1}\\ &= \frac{z\cdot 1+0\cdot n}{n\cdot 1}\\ &= \frac{z+0}{n}\\ &= \frac{z}{n}\,.\end{aligned}$$

das scheint sehr einleuchtend zu sein, es werden aber einige wichtige Eigenschaften der Multiplikation ganzer Zahlen mit den Zahlen 0 und 1 benötigt. Dabei ist die Zahl 1 das neutrale Element der Multiplikation, die Zahl 0 aber gehört nicht „richtig“ zur Multiplikation. In der Tat wird für die Gleichung $0\cdot n=0$ ein Gesetz benötigt, welches die Multiplikation und die Addition miteinander verbindet, das **Distributivgesetz**.

Für alle rationale Zahlen a,b,c gilt das Distributivgesetz:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\,. \tag{D}$$

Ein Produkt einer speziellen Form kann in eine Summe verwandelt werden. In der Schule stellen die meisten Übungsaufgaben Beispiele für die Anwendung des Distributivgesetzes dar. Dazu

[6] Es gibt also verschiedene Stufen der Unendlichkeit. Ob es zwischen der Anzahl der Elemente (sog. Mächtigkeit) der natürlichen Zahlen und der der reellen Zahlen noch weitere Stufen der Unendlichkeit gibt, kann man nicht entscheiden. Weiterführende Informationen für Interessenten finden sich unter dem Stichwort Kurt Gödel.

gehört etwa das Zusammenfassen mehrgliedriger Terme $4a+5a=9a$, das Ausmultiplizieren ((D) von links nach rechts), das Ausklammern ((D) von rechts nach links), die binomischen Formeln und so weiter.

3.2. Alle Rechengesetze in der Menge der rationalen Zahlen

Stellt man nun alle Rechengesetze für rationale Zahlen zusammen, so ergibt sich folgende Übersicht:

Für alle $a,b,c \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
(a+b)+c &= a+(b+c) & \qquad (a\cdot b)\cdot c &= a\cdot(b\cdot c) & \text{(A)}\\
a+b &= b+a & a\cdot b &= b\cdot a & \text{(K)}\\
a+0 &= a & a\cdot 1 &= a & \text{(N)}\\
a+(-a) &= 0 & a\cdot\frac{1}{a} &= 1 \quad (a\neq 0) & \text{(I)}
\end{aligned}
$$

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \qquad \text{(D)}$$

Wegen der Gültigkeit der notierten Rechengesetze sagt an auch: die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist ein **Körper**. Die wesentliche Idee dabei ist, dass man 2 Rechenoperationen hat, die Addition und die Multiplikation und mindestens zwei Elemente, nämlich 0 und 1, so dass die Gesetze A, K, N, I jeweils für die beiden Rechenoperationen gelten; dazu kommt das Gesetz D.

Für die reellen Zahlen ändert sich algebraisch nichts. Das heißt, die reellen Zahlen bilden ebenfalls einen Körper. Nicht ganz einfach ist es aber, die Rechengesetze zu übertragen, was aber wiederum mittels des Konzepts der Intervallschachtelung möglich ist. Die Konstruktion ist mit der Addition und Multiplikation verträglich.

Fazit

- Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist ein Körper.
- Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist ein **Körper**.
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- Die Menge der reellen Zahlen ist (algebraisch) eine Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen mit allen Irrationalzahlen.

Das Konzept der Erweiterung eines Körpers um Objekte, die man etwa für die Lösung einer Gleichung benötigt, bestimmt im Folgenden das Vorgehen. Man kann die reellen Zahlen so mit zu konstruierenden Objekten erweitern, dass man auch negative Quadrate findet.

3.3. Die Rolle der Zahl Null bei der Multiplikation

Damit man sieht, dass man die Zahl Null eine Besonderheit im Zusammenhang mit der Multiplikation darstellt, möchte ich hier noch einige Beispiele hinzufügen.

1. Für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$a\cdot 0 = 0\,. \qquad (5)$$

Begründung:

$$
\begin{aligned}
a\cdot 0 &= a\cdot(0+0) & \text{(N)}\\
&= a\cdot 0 + a\cdot 0\,. & \text{(D)}
\end{aligned}
$$

$0=0+0$, da 0 das neutrale Element der Addition (N) ist. Die Anwendung des Distributivgesetzes (D) zeigt, dass $a\cdot 0$, das neutrale Element der Addition (also 0) sein muss, da nur dieses die Eigenschaft hat, bei der Addition Zahlen nicht zu verändern.

2. Die Zahl 0 besitzt bezüglich der Multiplikation kein inverses Element – kurz:

   Man kann nicht durch Null dividieren.

   Begründung: Nehmen wir an, es gibt $x \in \mathbb{Q}$, welches das inverse Element zu 0 ist. Dann folgt einerseits aus (I) $0 \cdot x = 1$, was aber zu (5) im Widerspruch steht, da $1 \neq 0$ in $\mathbb{Q}$.
3. Für alle $a,b \in \mathbb{Q}$ gilt:
   $$a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0\,.$$
   Begründung:
   „$\Longleftarrow$“: Wenn $a = 0$ oder $b = 0$, dann folgt aus (5) $a \cdot b = 0$.
   „$\Longrightarrow$“: Sei $a \cdot b = 0$ und $b \neq 0$. Dann folgt
   $$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \\ (a \cdot b) \cdot \frac{1}{b} &= 0 \cdot \frac{1}{b} && (b \neq 0) \\ a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) &= 0 && \text{(A) und (5)} \\ a \cdot 1 &= 0 && \text{(I)} \\ a &= 0 && \text{(N)} \end{aligned}$$
4. Hinweis: Die Aussagen gelten sinngemäß auch für reelle Zahlen.

4. Eine Körpererweiterung für $\mathbb{Q}$

4.1. Problemstellung und Lösung

Betrachten wir *in der Menge der rationalen Zahlen* die Gleichung
$$x^2 = 2\,. \tag{6}$$
Diese Gleichung besitzt in $\mathbb{Q}$ keine Lösung, da die Zahl $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; sie ist irrational.

Wenn man nun eine Menge aus den rationalen Zahlen konstruieren möchte, in der die Gleichung (6) eine Lösung besitzt, so bietet sich folgende Definition an:
$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{a + b \cdot \sqrt{2} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{Q}\right\}\,.$$
Das liest man als „$\mathbb{Q}$ adjungiert $\sqrt{2}$“.

Offenbar hat (6) eine Lösung in $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, denn
$$\sqrt{2} = 0 + 1 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)\,.$$
Ferner wird in keiner Weise die algebraische Struktur gestört, denn $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ **ist ein Körper**. Der Nachweis folgt im nächsten Abschnitt 4.2.

4.2. Die Körpereigenschaften von $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$

4.2.1. Definition der Addition und Multiplikation

1. Die **Addition** sei zunächst einmal als $\oplus$ geschrieben. Später kann man die Unterscheidung wieder weglassen.

   Für alle $a_1,b_1,a_2,b_2 \in \mathbb{Q}$ sei definiert
   $$\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \oplus \left(a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}\right) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot \sqrt{2}\,.$$

Das Ergebnis ist von der Form $a + b \cdot \sqrt{2}$, also ein Element von $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$. [7]

2. Die **Multiplikation** sei zunächst einmal als $\odot$ geschrieben. Später kann man die Unterscheidung wieder weglassen.

   Für alle $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$ sei definiert

$$\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \odot \left(a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}\right) = (a_1 a_2 + 2 b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \cdot \sqrt{2}\,.$$

   Das Ergebnis ist von der Form $a + b \cdot \sqrt{2}$, also ein Element von $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$. [8]

Ein einzelner Nachweis aller Körpereigenschaften ist natürlich teilweise mühsam, soll aber hier trotzdem vollständig durchgeführt werden, um zu zeigen, wie sich die Gesetzmäßigkeiten von den rationalen Zahlen in die neue erweiterte Menge übertragen.

4.2.2. Nachweis der Gruppeneigenschaft der Addition

Im Folgenden seien $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Q}$.

1. (A,$\oplus$):

$$\begin{aligned}
&\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \oplus \left(\left(a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}\right) \oplus \left(a_3 + b_3 \cdot \sqrt{2}\right)\right) \\
&= \left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \oplus \left((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3) \cdot \sqrt{2}\right) \\
&= (a_1 + (a_2 + a_3)) + (b_1 + (b_2 + b_3)) \cdot \sqrt{2} && (\text{A in } (\mathbb{Q},+)) \\
&= ((a_1 + a_2) + a_3) + ((b_1 + b_2) + b_3) \cdot \sqrt{2} \\
&= \left((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot \sqrt{2}\right) \oplus \left(a_3 + b_3 \cdot \sqrt{2}\right) \\
&= \left(\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \oplus \left(a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}\right)\right) \oplus \left(a_3 + b_3 \cdot \sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

2. (K,$\oplus$):

$$\begin{aligned}
\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \oplus \left(a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}\right) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot \sqrt{2} && (\text{K in } (\mathbb{Q},+)) \\
&= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1) \cdot \sqrt{2} \\
&= \left(a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}\right) \oplus \left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

3. (N,$\oplus$): Das neutrale Element ist $0 + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, denn

$$\begin{aligned}
\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \oplus \left(0 + 0 \cdot \sqrt{2}\right) &= (a_1 + 0) + (b_1 + 0) \cdot \sqrt{2} && (\text{N in } (\mathbb{Q},+)) \\
&= a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}
\end{aligned}$$

4. (I,$\oplus$): Zu $a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}$ lautet das inverse Element $(-a_1) + (-b_1) \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, denn

$$\begin{aligned}
\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \oplus \left((-a_1) + (-b_1) \cdot \sqrt{2}\right) &= (a_1 + (-a_1)) + (b_1 + (-b_1)) \cdot \sqrt{2} && (\text{I in } (\mathbb{Q},+)) \\
&= 0 + 0 \cdot \sqrt{2}
\end{aligned}$$

[7] Im Grunde erfolgt die Definition so, als wäre $\oplus$ das gleiche wie $+$, man fasst zusammengehörige Teile (komponentenweise) zusammen: $\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) + \left(a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}\right) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot \sqrt{2}$.

[8] Im Grunde erfolgt die Definition so, als wäre $\odot$ das gleiche wie „ $\cdot$ “, man fasst zusammengehörige Teile zusammen: $\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}\right) = a_1 a_2 + a_1 b_2 \sqrt{2} + b_1 a_2 \sqrt{2} + b_1 b_2 \sqrt{2}^2 = (a_1 a_2 + 2 b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \cdot \sqrt{2}$.

4.2.3. Nachweis der Gruppeneigenschaft der Multiplikation

Sei $a_i+b_i\cdot\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \setminus \left\{0+0\cdot\sqrt{2}\right\}$ für $i \in \{1{,}2{,}3\}$; in Worten: a_i, b_i, ... sind nicht gleichzeitig Null. Die Gesetze gelten zunächst nicht für das neutrale Element der Addition in $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$. Die Gesetze A, K und N lassen sich dafür aber einzeln nachweisen. Das Gesetz I gilt aber nicht für das neutrale Element der Addition in $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$.

1. (A,$\odot$):

$$\begin{aligned}
&\left(a_1+b_1\cdot\sqrt{2}\right)\odot\left(\left(a_2+b_2\cdot\sqrt{2}\right)\odot\left(a_3+b_3\cdot\sqrt{2}\right)\right)\\
&=\left(a_1+b_1\cdot\sqrt{2}\right)\odot\left((a_2a_3+2b_2b_3)+(a_2b_3+b_2a_3)\cdot\sqrt{2}\right)\\
&=\left(a_1\left(a_2a_3+2b_2b_3\right)+2b_1\left(a_2b_3+b_2a_3\right)\right)+\left(a_1\left(a_2b_3+b_2a_3\right)+b_1\left(a_2a_3+2b_2b_3\right)\right)\cdot\sqrt{2}\\
&=\left(a_1a_2a_3+2a_1b_2b_3+2b_1a_2b_3+2b_1b_2a_3\right)+\left(a_1a_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3+2b_1b_2b_3\right)\cdot\sqrt{2}\\
&=\left(\left(a_1a_2+2b_1b_2\right)a_3+2\left(a_1b_2+b_1a_2\right)b_3\right)+\left(\left(a_1a_2+2b_1b_2\right)b_3+\left(a_1b_2+b_1a_2\right)a_3\right)\cdot\sqrt{2}\\
&=\left(\left(a_1a_2+2b_1b_2\right)+\left(a_1b_2+b_1a_2\right)\cdot\sqrt{2}\right)\odot\left(a_3+b_3\cdot\sqrt{2}\right)\\
&=\left(\left(a_1+b_1\cdot\sqrt{2}\right)\odot\left(a_2+b_2\cdot\sqrt{2}\right)\right)\odot\left(a_3+b_3\cdot\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

2. (K,$\odot$):

$$\begin{aligned}
\left(a_1+b_1\cdot\sqrt{2}\right)\odot\left(a_2+b_2\cdot\sqrt{2}\right)&=\left(a_1a_2+2b_1b_2\right)+\left(a_1b_2+b_1a_2\right)\cdot\sqrt{2}\\
&=\left(a_2a_1+2b_2b_1\right)+\left(b_2a_1+a_2b_1\right)\cdot\sqrt{2}\\
&=\left(a_2+b_2\cdot\sqrt{2}\right)\odot\left(a_1+b_1\cdot\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

3. (N,$\odot$): Das neutrale Element[9] ist $1+0\cdot\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, denn

$$\begin{aligned}
\left(a_1+b_1\cdot\sqrt{2}\right)\odot\left(1+0\cdot\sqrt{2}\right)&=\left(a_1\cdot 1+2b_1\cdot 0\right)+\left(a_1\cdot 0+b_1\cdot 1\right)\cdot\sqrt{2}\\
&=a_1+b_1\cdot\sqrt{2}
\end{aligned}$$

4. (I,$\odot$): Zu $a_1+b_1\cdot\sqrt{2}$ lautet das inverse Element

$$\frac{a_1}{a_1^2-2b_1^2}+\frac{-b_1}{a_1^2-2b_1^2}\cdot\sqrt{2}\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right).$$

[9] Das neutrale Element kann man so für einen Ansatz berechnen:

$$\begin{aligned}
\left(a_1+b_1\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(x+y\cdot\sqrt{2}\right)&=a_1+b_1\cdot\sqrt{2}\\
\left(a_1x+2b_1y\right)+\left(a_1y+b_1x\right)\cdot\sqrt{2}&=a_1+b_1\cdot\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Also muss gelten:

$$\begin{aligned}
a_1x+2b_1y&=a_1\\
a_1y+b_1x&=b_1\\
a_1b_1x+2b_1b_1y&=a_1b_1\\
a_1a_1y+b_1a_1x&=b_1a_1\\
\left(2b_1^2-a_1^2\right)\cdot y&=0 &&(2b_1^2-a_1^2\neq 0)\\
y&=0\\
a_1b_1x&=a_1b_1 &&(a_1b_1\neq 0)\\
x&=1
\end{aligned}$$

Falls $2b_1^2-a_1^2=0$ und $a_1=0$, so folgt $b_1=0$ (und umgekehrt) im Widerspruch zur Voraussetzung, da a_1 und b_1 nicht gleichzeitig Null sein dürfen. Ferner folgt aus $2b_1^2-a_1^2=0$ der Zusammenhang $a_1=b_1\cdot\sqrt{2}$, was wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}$ nicht gilt. Mithin ist $a_1b_1\neq 0$ und $2b_1^2-a_1^2\neq 0$ erfüllt.

Wie in der Fußnote 9 auf Seite 11 soll zunächst einmal das inverse Element (einfach) berechnet werden. Danach können die Eigenschaften geprüft werden. In Fußnote 9 wird auch gezeigt, dass $2b_1^2 - a_1^2 \neq 0$ ist.

Hier lautet der Ansatz:

$$\begin{aligned}\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(x + y \cdot \sqrt{2}\right) &= 1 + 0 \cdot \sqrt{2}\\ (a_1 x + 2b_1 y) + (a_1 y + b_1 x) \cdot \sqrt{2} &= 1 + 0 \cdot \sqrt{2}\end{aligned}$$

Also muss gelten:

$$\begin{aligned}a_1 x + 2b_1 y &= 1\\ a_1 y + b_1 x &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_1 b_1 x + 2b_1 b_1 y &= b_1\\ a_1 a_1 y + b_1 a_1 x &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(2b_1^2 - a_1^2\right) \cdot y &= b_1\\ y &= \frac{b_1}{2b_1^2 - a_1^2} = \frac{-b_1}{a_1^2 - 2b_1^2}\\ x &= -\frac{a_1 y}{b_1}\\ x &= -\frac{a_1 b_1}{(2b_1^2 - a_1^2) \cdot b_1}\\ &= -\frac{a_1}{2b_1^2 - a_1^2} = \frac{a_1}{a_1^2 - 2b_1^2}\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch so vorgehen:

$$\begin{aligned}\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(x + y \cdot \sqrt{2}\right) &= 1 + 0 \cdot \sqrt{2}\\ x + y \cdot \sqrt{2} &= \frac{1 + 0 \cdot \sqrt{2}}{a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}}\\ &= \frac{1 + 0 \cdot \sqrt{2}}{a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{a_1 - b_1 \cdot \sqrt{2}}{a_1 - b_1 \cdot \sqrt{2}}\\ &= \frac{a_1 - b_1 \cdot \sqrt{2}}{a_1^2 - 2b_1^2}\\ &= \frac{a_1}{a_1^2 - 2b_1^2} + \frac{-b_1}{a_1^2 - 2b_1^2} \cdot \sqrt{2}\end{aligned}$$

Jetzt prüfen wir, dass das berechnete Element tatsächlich das inverse Element ist:

$$\begin{aligned}&\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \odot \left(\frac{a_1}{a_1^2 - 2b_1^2} + \frac{-b_1}{a_1^2 - 2b_1^2} \cdot \sqrt{2}\right)\\ &= \left(a_1 \frac{a_1}{a_1^2 - 2b_1^2} + 2b_1 \frac{-b_1}{a_1^2 - 2b_1^2}\right) + \left(a_1 \frac{-b_1}{a_1^2 - 2b_1^2} + b_1 \frac{a_1}{a_1^2 - 2b_1^2}\right) \cdot \sqrt{2}\\ &= \frac{a_1^2 - 2b_1^2}{a_1^2 - 2b_1^2} + 0 \cdot \sqrt{2}\\ &= 1 + 0 \cdot \sqrt{2}\end{aligned}$$

4.2.4. Nachweis des Distributivgesetzes (D)

$$\begin{aligned}
&\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \odot \left(\left(a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}\right) \oplus \left(a_3 + b_3 \cdot \sqrt{2}\right)\right)\\
&= \left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \odot \left((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3) \cdot \sqrt{2}\right)\\
&= (a_1 (a_2 + a_3) + 2b_1 (b_2 + b_3)) + (a_1 (b_2 + b_3) + b_1 (a_2 + a_3)) \cdot \sqrt{2}\\
&= (a_1a_2 + a_1a_3 + 2b_1b_2 + 2b_1b_3) + (a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3) \cdot \sqrt{2}\\
&= ((a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1a_3 + 2b_1b_3)) + ((a_1b_2 + b_1a_2) + (a_1b_3 + b_1a_3)) \cdot \sqrt{2}\\
&= \left((a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2) \cdot \sqrt{2}\right) \oplus \left((a_1a_3 + 2b_1b_3) + (a_1b_3 + b_1a_3) \cdot \sqrt{2}\right)\\
&= \left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \odot \left(a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}\right) \oplus \left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \odot \left(a_3 + b_3 \cdot \sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

Hier wird in besonderem Maße von den Körpereigenschaften der rationalen Zahlen in den einzelnen Komponenten (Summanden mit und ohne Faktor $\sqrt{2}$) Gebrauch gemacht.

4.3. Fazit und Beispiele

An den vorausgegangenen Betrachtungen kann man erkennen, dass Körpererweiterungen eine Möglichkeit aufzeigen, Lösungen für Gleichungen anzugeben, die bis dahin in der zugrunde liegenden Menge nicht lösbar sind. Diese Körpererweiterungen laufen über bekannte Rechenregeln ab, so dass letztlich eine Unterscheidung der Addition oder Multiplikation in der Grundmenge $\mathbb{Q}$ und der Addition oder Multiplikation in der erweiterten Menge nicht erforderlich ist: man kann so rechnen „wie man es gewöhnt ist“. Von daher kann auf die spezielle Schreibweise $\oplus$ oder $\odot$ verzichtet werden.

Zur Übung kann man ja die Aufgaben nachrechnen.

Gegeben seien

$$\begin{aligned}
a &= 3 - 2 \cdot \sqrt{2} & b &= -2 - \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2}\\
c &= 27 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} & d &= -2{,}\overline{74} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}\\
e &= -6 + 0 \cdot \sqrt{2} & f &= 0 + 1 \cdot \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Rechne nach.

1. $a + bc = -\frac{158}{3} - \frac{421}{6} \cdot \sqrt{2}$
2. $a + b + c + d + e + f = \frac{1906}{99} - \frac{17}{6} \cdot \sqrt{2}$
3. $a - (b + c)\, d - e = \frac{7240}{99} - \frac{4837}{297} \cdot \sqrt{2}$
4. $c + e = 21 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}$
5. $c + f = 24 + \frac{4}{3} \cdot \sqrt{2}$
6. $ce = -162 - 2 \cdot \sqrt{2}$
7. $cf = \frac{2}{3} + 27 \cdot \sqrt{2}$
8. $\left(x + y \cdot \sqrt{2}\right)^2 = x^2 + 2xy \cdot \sqrt{2} + 2y^2 = \left(x^2 + 2y^2\right) + 2xy \cdot \sqrt{2}$
9. $\left(x - y \cdot \sqrt{2}\right)\left(x + y \cdot \sqrt{2}\right) = x^2 - 2y^2$

5. Konstruktion der komplexen Zahlen

5.1. Problemstellung

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl, wäre aber ganz nützlich zur Lösung der (quadratischen) Gleichung

$$x^2 = 2 \qquad \left(\mathbb{L} = \left\{\sqrt{2},\, -\sqrt{2}\right\}\right) .$$

Nun lässt sich die Gleichung zwar nicht in $\mathbb{Q}$, jedoch in $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ lösen.

In der Menge der reellen Zahlen gibt es auch (quadratische) Gleichungen, die keine Lösung haben, da das Quadrat reeller Zahlen stets größer oder gleich 0 ist.

Betrachten wir die Gleichung

$$x^2 = -1 \, ,$$

dann gibt es in $\mathbb{R}$ keine Lösung. *Wenn* es aber ein Objekt[10] i gibt[11] mit

$$i^2 = -1 \qquad (i \notin \mathbb{R}) \, ,$$

dann sollte für die Lösungsmenge gelten:

$$\mathbb{L} = \{i,\, -i\} \, .$$

Wir basteln jetzt ein solches i.

5.2. Basteln nach Vorlage

Grundmenge	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
Gleichung	$x^2 = 2$	$x^2 = -1$
Lösungsmenge	$\mathbb{L} = \left\{\sqrt{2},\, -\sqrt{2}\right\}$	$\mathbb{L} = \{i, -i\}$
Körpererweiterung	$\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{a + b \cdot \sqrt{2} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{Q}\right\}$	$\mathbb{C} = \left\{(a\|b) \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R}\right\}$
Addition	$\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) + \left(a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}\right)$ $= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot \sqrt{2}$	$(a_1\|b_1) + (a_2\|b_2)$ $= (a_1 + a_2\|b_1 + b_2)$
Multiplikation	$\left(a_1 + b_1 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(a_2 + b_2 \cdot \sqrt{2}\right)$ $= (a_1 a_2 \mathbf{+2} b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \cdot \sqrt{2}$	$(a_1\|b_1) \cdot (a_2\|b_2)$ $= (a_1 a_2 \mathbf{-1} b_1 b_2\|a_1 b_2 + b_1 a_2)$

Statt der Summe $a+b\cdot\sqrt{2}$ mit $a,b \in \mathbb{Q}$ verwendet man nun **Zahlenpaare** $(a|b)$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ in der Definition. Der Grund liegt darin, dass man das Objekt i erst dann verwenden kann, wenn man seine Existenz nachgewiesen hat. Allerdings könnte man umgekehrt statt $a + b \cdot \sqrt{2}$ auch (kürzer und letztlich effektiver) $(a|b)$ schreiben[12]. Da man immer auch den Kontext der Betrachtungen klar formulieren muss, ergibt sich keine Verwechslungsgefahr.

Die Addition wird wieder genau wie vorher „komponentenweise“ vorgenommen. Der wichtige Eingriff erfolgt an der Stelle, wo sich das Quadrieren auswirkt: es soll sich ja analog zu $\sqrt{2}^2 = 2$ gerade $i^2 = -1$ berechnen lassen.

[10] Dem Objekt geben wir den Namen i wie „imaginäre Zahl“. Der Name i dient der einfacheren Beschreibung der gewünschten Eigenschaften. Einen Sinn bekommt das Objekt erst durch den Nachweis seiner *Existenz*.

[11] Vergleiche mit $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, aber $\sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$.

[12] Man vergleiche das mit der Schreibweise in der Vektorrechnung, wo die Koordinaten eines Vektors genau die Zahlen sind, mit denen man die Basisvektoren (hier vergleichsweise $\mathbf{1}$ und $\sqrt{\mathbf{2}}$) multiplizieren muss, um den Vektor zu erhalten.

5.3. Der Körper der komplexen Zahlen

Die Menge $\mathbb{C}$ ist mit der Addition und der Multiplikation ein Körper (vergleiche 3.1 Seite 7).

Die Rechengesetze wurden bereits exemplarisch in 4.2 Seite 9 ausführlich und vollständig hergeleitet. Daher möchte ich an dieser Stelle darauf verzichten.

Wenn die Konstruktion der komplexen Zahlen abgeschlossen ist, erscheint es sinnvoller, Rechenbeispiele vorzuführen.

5.4. Die Zahl i

Fassen wir noch einmal die Definition von $\mathbb{C}$ mit der zugehörigen Addition und Multiplikation zusammen:

1. Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} = \left\{(a|b) \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R}\right\}$
2. Addition: $(a_1|b_1) + (a_2|b_2) = (a_1 + a_2|b_1 + b_2)$
3. Multiplikation: $(a_1|b_1) \cdot (a_2|b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2|a_1b_2 + b_1a_2)$

Man stellt nun fest, dass

$$\begin{aligned} (7|0) + (5|0) &= (12|0) \;; \\ (7|0) \cdot (5|0) &= (35|0) \;. \end{aligned}$$

Allgemein (für alle $a_1,b_1 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} (a_1|0) + (a_2|0) &= (a_1 + a_2|0) \;; \\ (a_1|0) \cdot (a_2|0) &= (a_1a_2 - 0 \cdot 0|a_1 \cdot 0 + 0 \cdot a_2) = (a_1a_2|0) \;. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Menge der reellen Zahl in der Menge der komplexen Zahlen mit der vorgegebenen Addition und Multiplikation genau durch die Zahlenpaare der Form $(x|0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ dargestellt werden können.

Daher schreibt man[13]:

$$x = (x|0) \;.$$

Dann kann man weiter schreiben:

1. Das neutrale Element der Addition ist $(0|0)$, also
$$(0|0) = 0\,.$$
2. Das neutrale Element der Multiplikation ist $(1|0)$, also
$$(1|0) = 1\,.$$

Darüber hinaus gibt es das Element $(0|1)$. Für dieses berechnet man

$$\begin{aligned} (0|1)^2 &= (0|1) \cdot (0|1) \\ &= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1|0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\ &= (-1|0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Man erkennt somit, dass es eine *komplexe* Zahl gibt, nämlich $(0|1)$, deren Quadrat die reelle Zahl -1 darstellt. $(0|1)$ ist *keine reelle* Zahl.

Definiert man nun zur Abkürzung

$$(0|1) = i\,,$$

[13] Man nennt das Identifikation.

dann gilt
$$i^2 = -1\,.$$
Ferner erhält man für alle $y \in \mathbb{R}$ (also für alle *reellen* Zahlen y):
$$\begin{aligned} iy = i \cdot y &= (0|1) \cdot y \\ &= (0|1) \cdot (y|0) \\ &= (0 \cdot y - 1 \cdot 0|0 \cdot 0 + 1 \cdot y) \\ &= (0|y) \end{aligned}$$

Für jede komplexe Zahl gilt daher:
$$\begin{aligned} (x|y) &= (x|0) + (0|y) \\ &= x + iy \end{aligned}$$

und
$$\mathbb{C} = \left\{ x + iy \,\middle|\, x,y \in \mathbb{R} \right\}\,.$$

5.5. Ergänzungen

5.5.1. Real- und Imaginärteil

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definiert man:

1. $x \in \mathbb{R}$ heißt Realteil von z: $x = \Re(z)$. [14]
2. $y \in \mathbb{R}$ heißt Imaginärteil von z: $x = \Im(z)$.
3. Beachte, der Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl z ist eine *reelle* Zahl. Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$
$$z = \Re(z) + i\Im(z).$$
4. Ist $\Re(z) = 0$ für $z \in \mathbb{C}$, so heißt z **rein imaginär**.
5. Ist $\Im(z) = 0$ für $z \in \mathbb{C}$, so stellt z eine reelle Zahl dar.

Beispiele:

1. $z = -4 + 6i$; $\Re(z) = -4$ und $\Im(z) = 6$.
2. $z = -4$; $\Re(z) = -4$ und $\Im(z) = 0$.
3. $z = 6i$; $\Re(z) = 0$ und $\Im(z) = 6$.
4. Zeige: $\Im\left(z \cdot \Re\left(z\right)\right) = \Re\left(z \cdot \Im\left(z\right)\right)$.
Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann gilt einerseits:
$$\begin{aligned} \Im\left(z \cdot \Re\left(z\right)\right) &= \Im\left(\left(x + iy\right) \cdot \Re\left(x + iy\right)\right) \\ &= \Im\left(\left(x + iy\right) \cdot x\right) \\ &= \Im\left(x^2 + iyx\right) \\ &= yx = xy\,. \end{aligned}$$
Andererseits:
$$\begin{aligned} \Re\left(z \cdot \Im\left(z\right)\right) &= \Re\left(\left(x + iy\right) \cdot \Im\left(x + iy\right)\right) \\ &= \Re\left(\left(x + iy\right) \cdot y\right) \\ &= \Re\left(xy + iy^2\right) \\ &= xy\,. \end{aligned}$$

[14] Falls einem die Zeichen $\Re$ oder $\Im$ nicht zusagen, besteht auch die Möglichkeit, Re oder Im zu schreiben. Ich habe mich hier an die LaTeX-Darstellung mit den Befehlen `\Re` und `\Im` gehalten.

5.5.2. Einfaches Rechnen mit komplexen Zahlen

Nach den gegebenen Betrachtungen kann man als Fazit formulieren, dass mit den komplexen zahlen genau so gerechnet werden kann, wie man das aus dem Schulunterricht mit (reellen) Zahlen gewöhnt ist. **Das einzige, was man beachten muss, ist die Gleichung**

$$i^2 = -1\,.$$

Beispiele:

1. a) $(3|5) + (8|-17) = (3+8|5+(-17)) = (11|-12)$
   b) $(3+5i) + (8-17i) = 3+5i+8-17i = 11-12i$
2. a) $(3|5) \cdot (8|-17) = (3 \cdot 8 + (-5) \cdot (-17)\,|3 \cdot (-17) + 5 \cdot 8) = (109|-11)$
   b) $(3+5i) \cdot (8-17i) = 24 - 51i + 40i - 85 \cdot (-1) = 109 - 11i$

5.5.3. Potenzen von i

$$\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ \dots \\ i^n &= \begin{cases} i, \text{ falls} & n \bmod 4 = 1 \\ -1, \text{ falls} & n \bmod 4 = 2 \\ -i, \text{ falls} & n \bmod 4 = 3 \\ 1, \text{ falls} & n \bmod 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Beispiele:

1. $i^{367} = -i$, denn $367 \bmod 4 = 3$, da $367 = 91 \cdot 4 + 3$.
2. $3i \cdot 4i \cdot 5i \cdot i = 60$
3. $2i \cdot 8i + 4i = -16 + 4i$
4. $(-i)^2 = (-i) \cdot (-i) = -1$
5. $-i^2 = -(i \cdot i) = -(-1) = 1$

5.5.4. Binomische Formeln

$$\begin{aligned} (x+iy)^2 &= x^2 + 2ixy + (iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 \\ (x-iy)^2 &= x^2 - 2ixy + (-iy)^2 = x^2 - 2ixy - y^2 \\ (x+iy)(x-iy) &= x^2 - (-iy)^2 = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Hinweis: Der Term $x^2 + y^2$ lässt sich in $\mathbb{R}$ *nicht* faktorisieren, allerdings in $\mathbb{C}$.
Der Term $x^2 - y^2$ lässt sich in $\mathbb{R}$ faktorisieren (3. binomische Formel: $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$), damit allerdings auch in $\mathbb{C}$, denn $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Beispiele:

1. $(1-i)^1 = (1-i)$
2. $(1-i)^2 = (1-i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$
3. $(1-i)^3 = -2i \cdot (1-i) = -2 - 2i$

4. $(1-i)^4 = (-2i)^2 = -4$
5. $(1-i)^5 = -4 \cdot (1-i) = -4+4i$
6. $(1-i)^6 = (-2-2i)^2 = 4+8i-4 = 4i$

5.5.5. Division komplexer Zahlen

Bei der Division muss man einen Trick verwenden, der dem Rationalmachen des Nenners bei der Verwendung von Wurzeln entspricht. Letztlich ist es eine Anwendung der 3. binomischen Formel, denn diese liefert als Ergebnis eine reelle Zahl.

$$\begin{aligned}\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} &= \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}\cdot\frac{a_2-ib_2}{a_2-ib_2}\\ &= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i\,(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}\\ &= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\cdot\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}\frac{3-4i}{9+18i} &= \frac{3-4i}{9+18i}\cdot\frac{9-18i}{9-18i} = \frac{(3-4i)\,(9-18i)}{(9+18i)\,(9-18i)}\\ &= \frac{27-54i-36i-72}{81+324} = \frac{-45-90i}{405}\\ &= \frac{-45}{405}+\frac{-90}{405}i = \frac{1}{9}+\frac{2}{9}i\end{aligned}$$

6. Komplexe Zahlen in der Geometrie

Da die komplexen Zahlen als Paare reeller Zahlen definiert sind, kann man jede komplexe Zahl $z = (x|y) = x+iy$ in einem Koordinatensystem[15] darstellen. Auf der x-Achse trägt man den Realteil und auf der y-Achse den Imaginärteil der komplexen Zahl z auf. Vergleiche dazu die Abbildung 1 auf Seite 19.

Jeder komplexen Zahl $z = (x|y)$ entspricht dann ein Vektor, der durch den Pfeil vom Nullpunkt $(0|0)$ zum Punkt mit den Koordinaten $(x|y)$ repräsentiert wird. Man identifiziert die komplexe Zahl z mit diesem Vektor. [16]

6.1. Geometrische Darstellung der Addition komplexer Zahlen

Die Addition komplexer Zahlen stellt sich wie die Addition von Vektoren dar: Man hängt die Vektoren so aneinander, dass der Anfang des 2. Vektors am Ende des 1. Vektors liegt. Dann weist der Summenvektor vom Anfang des 1. Vektors bis zum Ende des 2. Vektors (Abbildung 1 auf Seite 19).

Beispiel für die Addition:

$$\begin{aligned}z_1+z_2 &= (1|3)+(-4|-2)\\ &= (1+3i)+(-4-2i)\\ &= -3+i\\ &= (-3|1)\end{aligned}$$

[15] Das Koordinatensystem nennt man auch GAUSSsche Zahlenebene; siehe dazu [6].

[16] Dieser Vorstellung liegt die Tatsache zugrunde, dass jeder Körper über sich selbst einen Vektorraum darstellt. Speziell ist $\mathbb{C}$ ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die (kanonischen) Basisvektoren sind **1** und **i**. Die Betrachtungen möchte ich hier aber nicht weiter ausführen. Näheres dazu findet man etwa in [7].

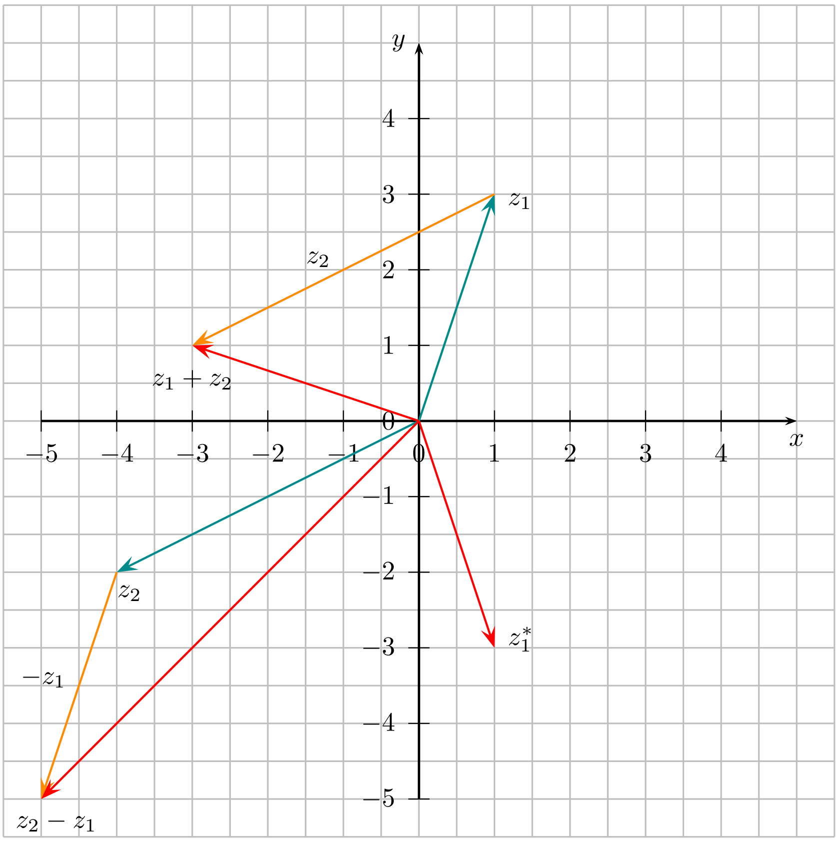

Abbildung 1: Die GAUSSsche Zahlenebene und die Addition zweier komplexer Zahlen

Beispiel für die Subtraktion:

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= (-4|-2) - (1|3) \\ &= (-4-2i) - (1+3i) \\ &= -5-5i \\ &= (-5|-5) \end{aligned}$$

6.1.1. Der Betrag einer komplexen Zahl

Es gibt für komplexe Zahlen keine Größer- (>) oder Kleiner-Relation (<) wie etwa in der Menge der reellen Zahlen[17]. Das ist leider der Preis für den Wunsch, dass es komplexe Zahlen gibt, deren Quadrat negativ ist.

Was bleibt ist – geometrisch gesehen - im Wesentlichen der Abstand der Zahl vom Nullpunkt, letztlich die Länge des Pfeils, der die komplexe Zahl beschreibt: der Betrag der komplexen Zahl. Dieser lässt sich mit dem Satz des Pythagoras berechnen:

$$\begin{aligned} |z| &= |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}\,; \\ |z| &= \sqrt{zz^*} = \sqrt{(x+iy)\,(x-iy)} = \sqrt{x^2+y^2}\,. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $z^* = x - iy$ die an der x-Achse (= $\Re$-Achse) gespiegelte komplexe Zahl $z = x + iy$. Man nennt die Zahl z^* die zu z **konjugiert komplexe Zahl** (siehe Abbildung 1 auf Seite 19).

[17]Siehe 6.1.2 auf Seite 20

Beispiele für den Betrag einer komplexen Zahl:

$$|(1|3)| = |1+3i| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$
$$|(1|3)| = \sqrt{(1+3i)\,(1-3i)} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$
$$|(-4|-2)| = |-4-2i| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{20}$$

6.1.2. In C gibt es keine $<$-Relation.

Im Folgenden möchte ich zeigen, dass es keine $<$-Relation (Vergleichsbeziehung) in der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ geben kann, die mit der aus der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bekannten $<$-Relation vergleichbar ist.

Zunächst notieren wir die Gesetzmäßigkeiten, die bekanntermaßen in $\mathbb{R}$ gelten.

Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$a \leq b \text{ oder } b \leq a \tag{7}$$
$$a \leq b \text{ und } b \leq a \Longrightarrow a = b \tag{8}$$
$$0 \leq a \text{ und } 0 \leq b \Longrightarrow 0 \leq a \cdot b \tag{9}$$
$$a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c \tag{10}$$

Nun zeigen wir, dass diese Gesetzmäßigkeiten in $\mathbb{C}$ nicht erfüllbar sind.

Nehmen wir also an, dass es eine Ordnung gibt, die den Gesetzen (7), (8), (9) und (10) genügt. Dann gilt für die Zahlen 0 und i wegen (7)

$$0 \leq i \text{ oder } i \leq 0\,. \tag{11}$$

Nehmen wir an, es gilt $0 \leq i$. Dann gilt nach (9)

$$0 \leq i^2 = -1\,. \tag{12}$$

Dies ist zunächst einmal kein Widerspruch, weil die Relation „$\leq$“ in $\mathbb{C}$ ja grundsätzlich ganz andere Eigenschaften haben kann als man gewöhnt ist.

Und noch einmal mit (9) und (12)

$$0 \leq -1 \cdot i = -i\,. \tag{13}$$

Erneute Multiplikation mit $0 \leq i$ liefert

$$0 \leq 1\,. \tag{14}$$

Aus der Gleichung (12) folgt durch Addition von 1 auf beiden Seiten nach (10)

$$1 \leq 0\,. \tag{15}$$

Hieraus folgt zusammen mit (14) und (8), dass 1=0 ist.

Dies kann allerdings in *keinem* Zahlenkörper, in dem die dargestellten Rechengesetze für „+“ und „$\cdot$“ und das Distributivgesetz gelten, auftreten, da mindestens 1 als neutrales Element für die Multiplikation und 0 als neutrales Element für die Addition existieren müssen und für jedes von 0 verschiedene Element ein inverses Element bezüglich „$\cdot$“ existieren muss, also *immer* $1 \neq 0$ sein muss.

Der andere Fall von (11) $i \leq 0$ führt in entsprechender Weise zum Widerspruch.

6.2. Geometrische Darstellung der Multiplikation komplexer Zahlen

Man kann sich der geometrischen Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen in einzelnen Schritten nähern.

6.2.1. Die Funktion $f(z) = i \cdot z$

$$i \cdot (3 + 4i) = -4 + 3i$$
$$f(z) = i \cdot z = i \cdot (x + iy) = -y + ix$$

Die Funktion $f(z) = i \cdot z$ stellt also eine Drehung um $90° = \frac{\pi}{2}$ dar (Abbildung 2). [18]

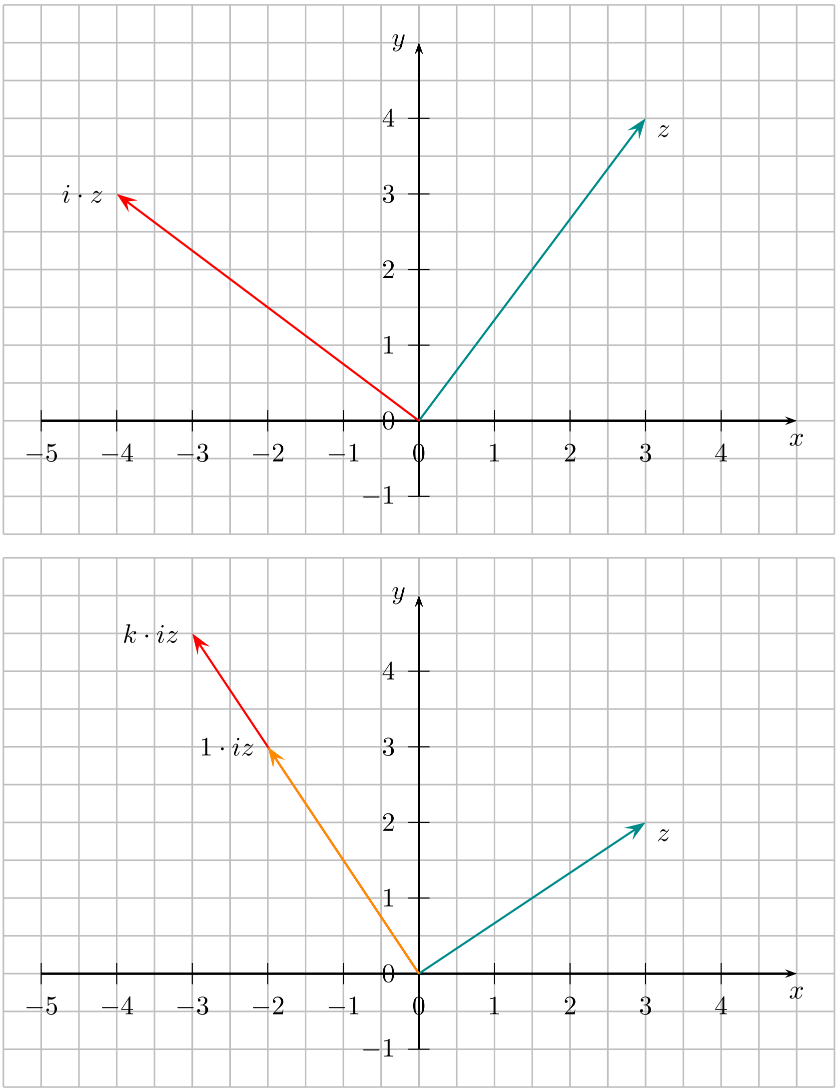

Abbildung 2: Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen; die Funktionen $f(z) = i \cdot z$ (oben) und $f(z) = k \cdot iz$ (unten)

6.2.2. Die Funktion $f(z) = k \cdot iz$ mit $k \in \mathbb{R}$

$$1{,}5 \cdot (3 + 2i)\, i = -3 + 4{,}5i$$
$$f(z) = k \cdot iz = k \cdot i \cdot (x + iy) = -ky + ikx$$

Die Funktion $f(z) = k \cdot iz$ stellt also eine Drehung um $90° = \frac{\pi}{2}$ mit anschließender Streckung um den Faktor k dar (Abbildung 2).

[18] Auch aus der Vektorrechnung ist bekannt, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ zueinander senkrecht stehen: das Skalarprodukt ist 0.

6.2.3. Die Funktion $f(z) = (a + bi) \cdot z$ mit $a,b \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
(2+3i)\cdot(3+4i) &= 2\cdot(3+4i) + 3i\cdot(3+4i) = -6+17i \\
f(z) &= (a+bi)\cdot z = a\cdot z + b\cdot iz
\end{aligned}
$$

Die Funktion $f(z) = (a+bi)\cdot z$ stellt also die vektorielle Summe aus einer Streckung um den Faktor a und einer Drehung um $90° = \frac{\pi}{2}$ mit anschließender Streckung um den Faktor b dar (Abbildung 3) dar. Insgesamt also letztlich eine Drehstreckung.

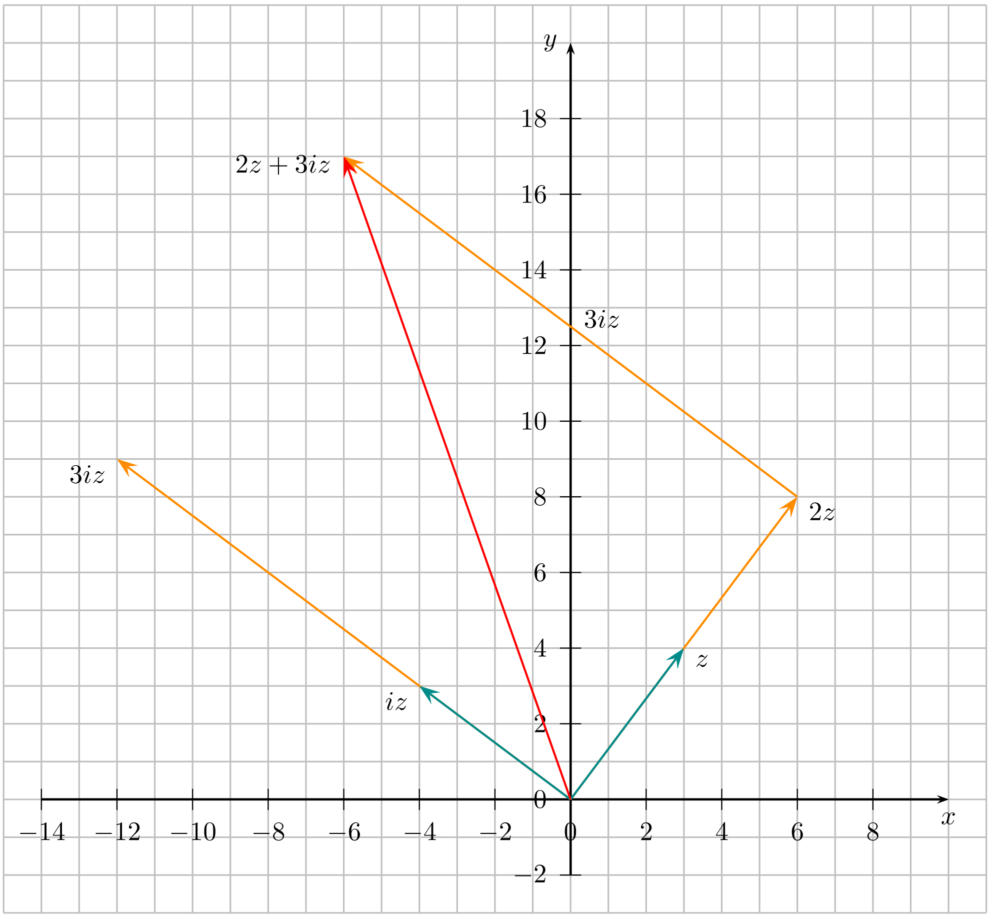

Abbildung 3: Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen; die Funktion $f(z) = (a+bi)\cdot z$

Zusatz: Eine Betrachtung mit trigonometrischen Kenntnissen lässt natürlich eine geschlossene Darstellung des Produkts zu. Das setzt allerdings die Kenntnis der Additionstheoreme für sin und cos voraus:

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\,; \\
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\,.
\end{aligned}
$$

Wählt man die trigonometrische Darstellung für komplexe Zahlen (Polarkoordinaten), dann folgt nacheinander:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \\
z_2 &= |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\
&= |z_1|\,|z_2|\,(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\
&= |z_1|\,|z_2|\,((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \\
&= |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))
\end{aligned}
$$

Das Produkt $z_1 z_2$ stellt sich also als Drehung um den Nullpunkt mit dem Winkel $\varphi_1 + \varphi_2$ und anschließender Streckung um den Faktor $|z_1|\,|z_2|$ dar.

Beispiel 1: Gewählt wurden dazu die Daten zur Abbildung 3.

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 2 + 3i\,; \quad |z_1| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}\,; \quad \varphi_1 = \arctan\frac{3}{2} \approx 56{,}3^\circ \\
z_2 &= 3 + 4i\,; \quad |z_2| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5\,; \quad \varphi_2 = \arctan\frac{4}{3} \approx 53{,}1^\circ \\
z_1 z_2 &= |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \\
&\approx 5\,(\cos 109{,}4^\circ + i\sin 109{,}4^\circ) \\
&= 5\sqrt{13}\cos 109{,}4^\circ + i\cdot 5\sqrt{13}\sin 109{,}4^\circ \\
&= -6 + 17i \quad \text{(TR)}
\end{aligned}
$$

Beispiel 2: Betrachte dazu Abbildung 4.

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 6 - 2i\,; \quad |z_1| = \sqrt{6^2+2^2} = \sqrt{40}\,; \quad \varphi_1 = \arctan\frac{-2}{6} \approx -18{,}43^\circ \\
z_2 &= 2 + 3i\,; \quad |z_2| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}\,; \quad \varphi_2 = \arctan\frac{3}{2} \approx 56{,}31^\circ \\
z_1 z_2 &\approx \sqrt{40\cdot 13}\,(\cos 37{,}88^\circ + i\sin 37{,}88^\circ) \\
&= 2\sqrt{130}\cos 37{,}88^\circ + i\cdot 2\sqrt{130}\sin 37{,}88^\circ \\
&= 18 + 14i \quad \text{(TR)}
\end{aligned}
$$

7. Das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen

7.1. Lineare Gleichungen

1.

$$
\begin{aligned}
3z + 4 &= 15i \\
3z = &= -4 + 15i \\
z &= -\frac{4}{3} + 5i
\end{aligned}
$$

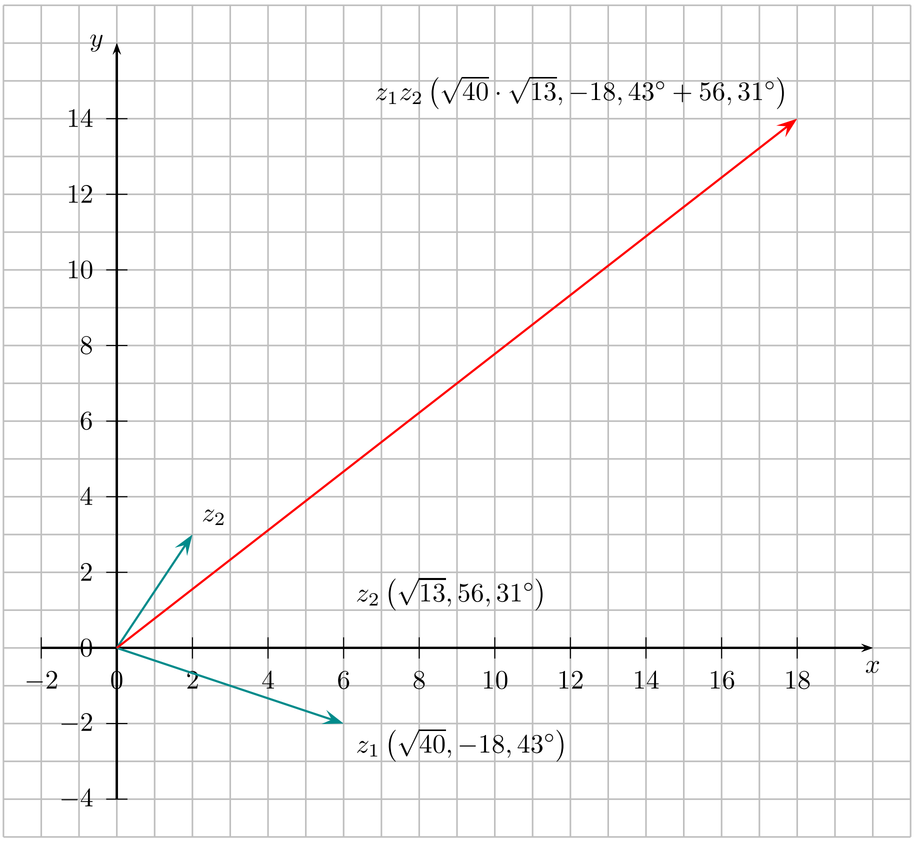

Abbildung 4: Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen; Darstellung in Polarkoordinaten

2.

$$\begin{aligned}
(3+4i)\,z + 4 - 5i &= 8 + 15i \\
(3+4i)\,z &= 8 + 15i - (4 - 5i) \\
(3+4i)\,z &= 4 + 20i \\
z &= \frac{4+20i}{3+4i} = \frac{4+20i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} \\
&= \frac{92+44i}{9+16} = \frac{92}{25} + \frac{44}{25}i
\end{aligned}$$

7.2. Quadratische Gleichungen

1. Eine einfache quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned}
z^2 &= -16 & z &= x + iy \quad x,y \in \mathbb{R} \\
(x+iy)^2 &= -16 \\
x^2 - y^2 + 2ixy &= -16 \\
2xy = 0 &\quad \text{und} & x^2 - y^2 &= -16 \\
x \neq 0 \Longrightarrow y = 0 &\quad \text{und} & x^2 &= -16\,; \quad \mathbb{L} = \{\,\} \\
y \neq 0 \Longrightarrow x = 0 &\quad \text{und} & -y^2 &= -16\,; \quad \mathbb{L} = \{\pm 4\}
\end{aligned}$$

Die Lösung ist also

$$\begin{aligned} z &= 0 + i\left(\pm\sqrt{16}\right) \\ z &= \pm 4i \end{aligned}$$

Einfacher ist folgender Weg:

$$\begin{aligned} z^2 &= -16 \\ z^2 + 16 &= 0 \\ (z+4i)(z-4i) &= 0 \\ z &= \pm 4i \end{aligned}$$

2. Hier soll ebenfalls eine Darstellung mittels der 3. binomischen Formel erfolgen.

   a)

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{1}{2}z - 7 &= 0 \\ \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 - 7 - \frac{1}{16} &= 0 \\ \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{113}{16} &= 0 \\ \left(\left(z + \frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{113}}{4}\right)\left(\left(z + \frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{113}}{4}\right) &= 0 \\ z &= -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{113}}{4} \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{1}{2}z + 7 &= 0 \\ \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 + 7 - \frac{1}{16} &= 0 \\ \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{111}{16} &= 0 \\ \left(\left(z + \frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{111}}{4} \cdot i\right)\left(\left(z + \frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{111}}{4} \cdot i\right) &= 0 \\ z &= -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{111}}{4} \cdot i \end{aligned}$$

3. Vorsicht bei der Formulierung komplexer Wurzeln

   Beachte

$$\sqrt{-1} \neq i\,,$$

   denn $i^2 = -1$, aber auch $(-i)^2 = -1$. Also ist die *komplexe* Wurzel keine Funktion:

$$\sqrt{-1} = \{-i, +i\}\ .$$

   Man kann nämlich nicht wie bei den reellen Zahlen eine positive oder negative Lösung angeben[19], weil es keine <- und auch keine >-Relation in $\mathbb{C}$ gibt (vergleiche 6.1.2 auf Seite 20). Es gilt also z. B. *nicht* $-i < i$. [20]

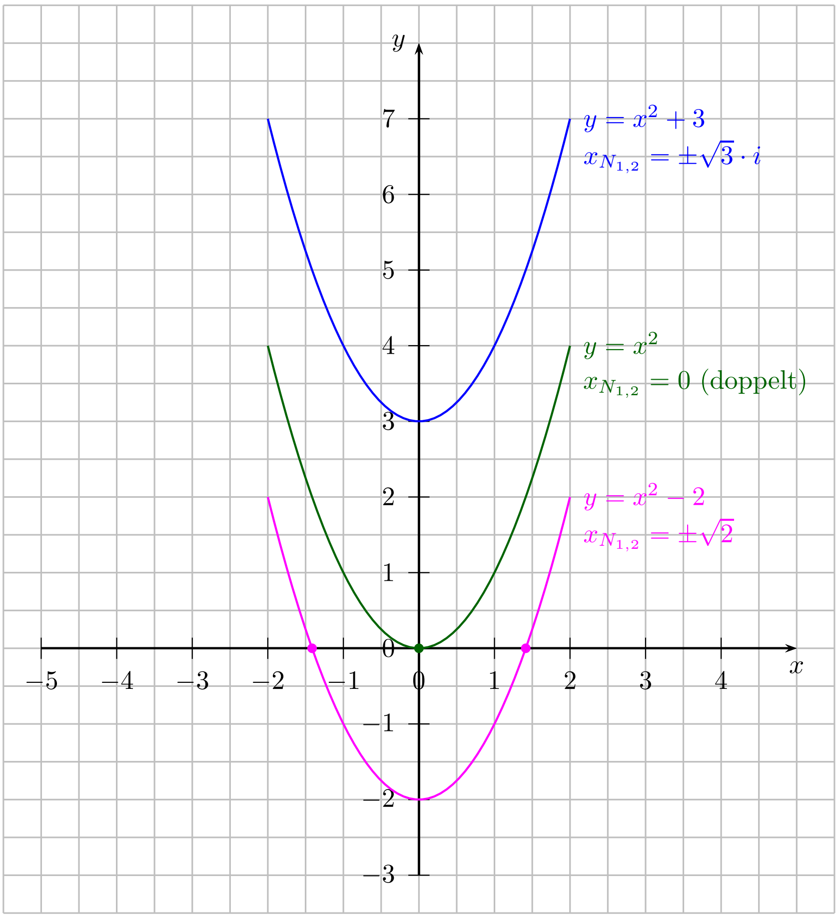

Abbildung 5: Zur Anzahl von Nullstellen von Parabeln

4. Die Nullstellen von Parabeln (Abbildung 5)

   Tatsächlich haben in $\mathbb{C}$ alle ganzrationalen Funktionen n-ten Grades genau n Nullstellen, wenn man ihre Vielfachheit mitzählt: z. B.

$$\underbrace{x^2}_{0;0} \cdot \big(\underbrace{x^2+3}_{\pm\sqrt{3}\cdot i}\big) \cdot \big(\underbrace{x-1}_{1}\big) = \underbrace{x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2}_{\text{5 Nullstellen}}$$

[19] In $\mathbb{R}$ definiert man ja die Wurzel als die nicht negative Zahl, deren Quadrat den Radikanden ergibt. Daher ist bekanntermaßen $\sqrt{16} = 4$ (und sonst nichts! – Wurzel**funktion**). Die Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = 16$ lautet daher $\mathbb{L} = \left\{\sqrt{16}, -\sqrt{16}\right\} = \{4, -4\}$

[20] Die Berechnung der Wurzeln komplexer Zahlen erfordert zur einfachen Darstellung die Kenntnisse der trigonometrischen Funktionen im Zusammenhang mit der komplexen Exponentialfunktion. Dies sei jetzt hier nicht weiter ausgeführt.

7.3. Gleichungssysteme

1. Zwei Gleichungen mit 2 Variablen

$$
\begin{aligned}
(2+i)\,z_1 + iz_2 &= 3+i && (16)\\
(1-i)\,z_1 + (2-i)\,z_2 &= 5 && (17)\\
\hline
(-1+2i)\,z_1 - z_2 &= -1+3i && (16)\cdot i\\
\frac{1-i}{2-i} z_1 + z_2 &= \frac{5}{2-i} && (16):(2-i)\\
\hline
(-1+2i)\,z_1 - z_2 &= -1+3i\\
\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5} i\right) z_1 + z_2 &= 2+i\\
\hline
\left(-\frac{2}{5} + \frac{9}{5} i\right) z_1 &= 1+4i\\
z_1 &= \frac{1+4i}{-\frac{2}{5}+\frac{9}{5}i} = 2-i\\
\hline
z_2 &= \frac{5-(1-i)\,(2-i)}{2-i}\\
&= \frac{5-(2-i-2i-1)}{2-i}\\
&= \frac{4+3i}{2-i} = 1+2i
\end{aligned}
$$

2. Bestimme die inverse Matrix. [21]

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
0 & 0 & i & 1 & 0 & 0\\
1+i & 2 & -2i & 0 & 1 & 0\\
-3 & 3+2i & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc|cccl}
1+i & 2 & -2i & 0 & 1 & 0 & \mid \cdot (1-i)\\
-3 & 3+2i & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 & \\
0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 & \mid \cdot (-i)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc|cccl}
2 & 2-2i & -2-2i & 0 & 1-i & 0 & \mid \cdot \frac{1}{2} \mid \cdot 3\\
-3 & 3+2i & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 & +\\
0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc|cccl}
1 & 1-i & -1-i & 0 & \frac{1}{2}(1-i) & 0 & \\
0 & 6-i & -\frac{14}{5}-3i & 0 & \frac{3}{2}(1-i) & 1 & \mid \cdot \frac{6}{37}+\frac{1}{37}i\\
0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc|cccl}
1 & 1-i & -1-i & 0 & \frac{1}{2}(1-i) & 0 & +\\
0 & 1 & -\frac{69}{185}-\frac{104}{185}i & 0 & \frac{21}{74}-\frac{15}{74}i & \frac{6}{37}+\frac{1}{37}i & \mid \cdot (-1\cdot(1-i))\\
0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 &
\end{array}
$$

[21] Aus einer Übung zur Linearen Algebra I im WS 1969/70, Prof. Dr. E. Burger, Universität zu Köln

$$\begin{array}{ccc|ccc l}
1 & 0 & -\frac{12}{185}-\frac{150}{185}i & 0 & \frac{31}{74}-\frac{1}{74}i & -\frac{7}{37}+\frac{5}{37}i & \\
0 & 1 & -\frac{69}{185}-\frac{104}{185}i & 0 & \frac{21}{74}-\frac{15}{74}i & \frac{6}{37}+\frac{1}{37}i & \\
0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & \mid \cdot \frac{69}{185}+\frac{104}{185}i \quad \mid \cdot \frac{12}{185}+\frac{150}{185}i
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & \frac{150}{185}-\frac{12}{185}i & \frac{31}{74}-\frac{1}{74}i & \frac{-7}{37}+\frac{5}{37}i \\
0 & 1 & 0 & \frac{104}{185}-\frac{69}{185}i & \frac{21}{74}-\frac{15}{74}i & \frac{6}{37}+\frac{1}{37}i \\
0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0
\end{array}$$

Die zu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 1+i & 2 & -2i \\ -3 & 3+2i & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

inverse Matrix lautet daher:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{150}{185}-\frac{12}{185}i & \frac{31}{74}-\frac{1}{74}i & \frac{-7}{37}+\frac{5}{37}i \\ \frac{104}{185}-\frac{69}{185}i & \frac{21}{74}-\frac{15}{74}i & \frac{6}{37}+\frac{1}{37}i \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anhang

A. Klassenarbeit und Lösungen Gruppe A

Die Klassenarbeit für PH-Diff, Klasse 10 ist am 27.03.2006 geschrieben worden.

Dateiname: 05103A-Lsg.TEX

Aufgabenstellung:

1. *Aus dem Unterricht ist bekannt, dass für einen Zahlenbereich (Zahlenkörper) nachstehende Gesetze für zwei Rechenoperationen (+ und ·) gelten müssen, damit man so rechnen kann „wie man es gewöhnt ist“.*

	Addition	*Multiplikation*
(1)	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
(2)	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
(3)	*Es gibt eine Zahl 0 mit* $a+0=a$	Es gibt eine Zahl 1 mit $a\cdot 1=a$
(4)	*Für jede Zahl a gibt es eine Zahl $-a$:* $a+(-a)=0$	Für jede Zahl $a\neq 0$ gibt es eine Zahl $\frac{1}{a}$: $a\cdot\frac{1}{a}=1$
(5)	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	

Tabelle 1: *Rechengesetze für Addition und Multiplikation in Zahlenkörpern*

a) *Notiere zunächst die Namen der Rechengesetze (1), (3) und (5).*

   Die Namen der Rechengesetze lauten: (1) Assoziativgesetz, (3) Gesetz vom neutralen Element und (5) Distributivgesetz.

b) *Formuliere* genau *die beiden Rechengesetze, die in der rechten Spalte der Tabelle 1 nicht aufgeführt sind.*

   Die fehlenden Gesetze sind in Tabelle 1 farbig eingetragen.

c) *In welchen Zahlenmengen mit Addition und Multiplikation (siehe Fußnote [22]) gelten* alle *diese Rechengesetze?*

   Sie gelten in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

d) *In welchen Zahlenmengen mit Addition und Multiplikation gelten nicht alle dieser Rechengesetze? Begründe die Aussagen durch ein geeignetes Gegenbeispiel.*

   Nicht alle Rechengesetze gelten in $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Z}$, denn in $\mathbb{N}$ gibt es z. B. die Zahl -2 nicht, damit $2+(-2)=0$ und in $\mathbb{Z}$ gibt es z. B. die Zahl $\frac{1}{2}$ nicht, damit $2\cdot\frac{1}{2}=1$.

2. *Berechne in der Menge $\mathbf{Q}\left(\sqrt{7}\right)$ – also der Menge aller Zahlen der Form $a+b\sqrt{7}$ mit $a,b\in\mathbf{Q}$ – für die Zahlen $r_1=2+\sqrt{7}$, $r_2=2\sqrt{7}$ und $r_3=7$:*

   a) $r_1-(r_2-r_3)$ $\left[=2+\sqrt{7}-\left(2\cdot\sqrt{7}-7\right)=2+\sqrt{7}-2\cdot\sqrt{7}+7=9-\sqrt{7}\right]$

   b) $r_1\cdot(r_2-r_3)$ $\left[=\left(2+\sqrt{7}\right)\left(2\cdot\sqrt{7}-7\right)=4\cdot\sqrt{7}-14+14-7\cdot\sqrt{7}=-3\cdot\sqrt{7}\right]$

   c) $\dfrac{r_3}{r_2}$ $\left[=\dfrac{7}{2\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{7}{2\cdot\sqrt{7}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\dfrac{7\cdot\sqrt{7}}{14}=\dfrac{1}{2}\sqrt{7}\right]$

[22] *Zur Auswahl stehen* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

3. *In der Menge* $\mathbb{C}$ *wurden eine Addition und eine Multiplikation erklärt (definiert).*
   a) *Erläutere die Addition der Zahlen* $z_1 = 3 - 2i$ *und* $z_2 = 5 + 3i$ *einmal durch eine Rechnung und zum anderen anhand einer Zeichnung in der* GAUSS*schen Zahlenebene.*

      $z_1 + z_2 = 8 + i$ und Abbildung 6 auf Seite 31.
   b) *Erläutere die Multiplikation der Zahlen* $z_1 = 2 + 2i$ *und* $z_2 = 2 + 5i$ *einmal durch eine Rechnung und zum anderen anhand einer Zeichnung in der* GAUSS*schen Zahlenebene.*

      $z_1 z_2 = -6 + 14i$ und Abbildung 6 auf Seite 31.
4. *Gegeben sei die Zahl* $z = 30 - 20i$ *. Berechne*
   a) $\mathrm{Re}(z) \quad \left[= 30\right]$
   b) $(\mathrm{Im}(z))^2 \quad \left[= (-20)^2 = 400\right]$
   c) $|z| \quad \left[= \sqrt{900 + 400} = \sqrt{1300} = 10\sqrt{13} \approx 36{,}06\right]$
   d) $z^* \quad \left[= 30 + 20i\right]$
   e) $z^2 \quad \left[= (30 - 20i)^2 = 900 - 1200i - 400 = 500 - 1200i\right]$
   f) $zz^* \quad \left[= (30 - 20i)\,(30 + 20i) = 900 + 400 = 1300\right]$
   g) $\dfrac{1}{z} \quad \left[= \dfrac{1}{30 - 20i} = \dfrac{1}{30 - 20i} \cdot \dfrac{30 + 20i}{30 + 20i} = \dfrac{30 + 20i}{1300} = \dfrac{3}{130} + \dfrac{1}{65}i\right]$
5. *Bestimme alle Lösungen in* $\mathbb{C}$ *.*
   a) $(2 - 3i)\,z = -4$

      $z = \dfrac{-4}{2 - 3i} \cdot \dfrac{2 + 3i}{2 + 3i} = \dfrac{-8 - 12i}{13} = -\dfrac{8}{13} - \dfrac{12}{13}i$
   b) $x^2 = -1024$

      Die beiden Lösungen sind $x_{1,2} = \pm 32i$
   c) $x^2 + 4x + 24 = 0$

      $(x + 2)^2 = -24 + 4 = -20$
      Die beiden Lösungen sind $x_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{20}$.
6. *Welche geometrische Bedeutung hat die komplexe Funktion* $z \longmapsto z^*$ *?*

   Die Funktion $z \longmapsto z^*$ bedeutet genauer ausgeschrieben $x + iy \longmapsto x - iy$. Der Realteil bleibt erhalten, der Imaginärteil wechselt das Vorzeichen.

   Geometrisch bedeutet das eine Spiegelung an der Re-Achse.

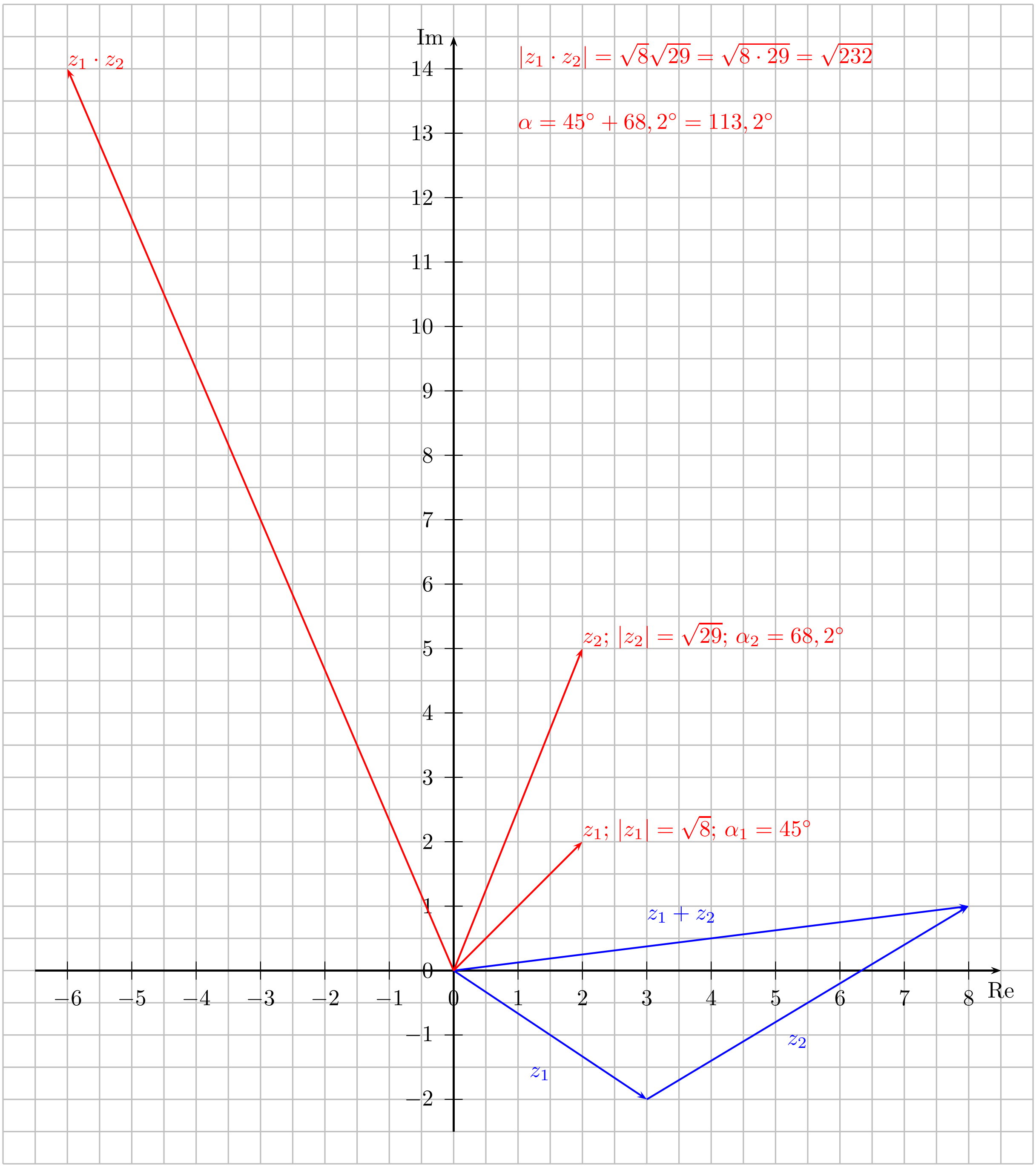

Abbildung 6: Zu Aufgabe 3a und zu Aufgabe 3b der Gruppe A

B. Klassenarbeit und Lösungen Gruppe B

Die Klassenarbeit für PH-Diff, Klasse 10 ist am 27.03.2006 geschrieben worden.

Dateiname: 05103B-Lsg.TEX

Aufgabenstellung:

1. *Aus dem Unterricht ist bekannt, dass für einen Zahlenbereich (Zahlenkörper) nachstehende Gesetze für zwei Rechenoperationen (+ und ·) gelten müssen, damit man so rechnen kann „wie man es gewöhnt ist“.*

	Addition	*Multiplikation*
(1)	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
(2)	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
(3)	Es gibt eine Zahl 0 mit $a+0=a$	Es gibt eine Zahl 1 mit $a\cdot 1=a$
(4)	Für jede Zahl a gibt es eine Zahl $-a$: $a+(-a)=0$	Für jede Zahl $a\neq 0$ gibt es eine Zahl $\frac{1}{a}$: $a\cdot\frac{1}{a}=1$
(5)	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	

Tabelle 2: Rechengesetze für Addition und Multiplikation in Zahlenkörpern

   a) *Notiere zunächst die Namen der Rechengesetze (2), (4) und (5).*

   Die Namen der Rechengesetze lauten: (2) Kommutativgesetz, (4) Gesetz vom inversen Element und (5) Distributivgesetz.

   b) *Formuliere* genau *die beiden Rechengesetze, die in der rechten Spalte der Tabelle 2 nicht aufgeführt sind.*

   Die fehlenden Gesetze sind in Tabelle 2 farbig eingetragen.

   c) *In welchen Zahlenmengen mit Addition und Multiplikation (siehe Fußnote [23]) gelten* alle *diese Rechengesetze?*

   Sie gelten in $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

   d) *In welchen Zahlenmengen mit Addition und Multiplikation gelten nicht alle dieser Rechengesetze? Begründe die Aussagen durch ein geeignetes Gegenbeispiel.*

   Nicht alle Rechengesetze gelten in $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Z}$, denn in $\mathbb{N}$ gibt es z.B. die Zahl -2 nicht, damit $2+(-2)=0$ und in $\mathbb{Z}$ gibt es z.B. die Zahl $\frac{1}{2}$ nicht, damit $2\cdot\frac{1}{2}=1$.

2. *Berechne in der Menge $\mathbb{Q}\left(\sqrt{11}\right)$ – also der Menge aller Zahlen der Form $a+b\sqrt{11}$ mit $a,b\in\mathbb{Q}$ – für die Zahlen $r_1=2+\sqrt{11}$, $r_2=2\sqrt{11}$ und $r_3=11$:*

   a) $r_1-(r_2-r_3)$ $\quad\left[=2+\sqrt{11}-\left(2\cdot\sqrt{11}-11\right)=2+\sqrt{11}-2\cdot\sqrt{11}+11=13-\sqrt{11}\right]$

   b) $r_1\cdot(r_2-r_3)$ $\quad\left[=\left(2+\sqrt{11}\right)\left(2\cdot\sqrt{11}-11\right)=4\cdot\sqrt{11}-22+22-11\cdot\sqrt{11}=-7\cdot\sqrt{11}\right]$

   c) $\dfrac{r_3}{r_2}$ $\quad\left[=\dfrac{11}{2\cdot\sqrt{11}}=\dfrac{11}{2\cdot\sqrt{11}}\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}=\dfrac{11\cdot\sqrt{11}}{22}=\dfrac{1}{2}\sqrt{11}\right]$

3. *In der Menge $\mathbb{C}$ wurden eine Addition und eine Multiplikation erklärt (definiert).*

   a) *Erläutere die Addition der Zahlen $z_1=3-2i$ und $z_2=3+5i$ einmal durch eine Rechnung und zum anderen anhand einer Zeichnung in der* Gauss*schen Zahlenebene.*

[23] *Zur Auswahl stehen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.*

$z_1 + z_2 = 6 + 3i$ und Abbildung 7 auf Seite 34.

b) *Erläutere die Multiplikation der Zahlen $z_1 = 2 + 2i$ und $z_2 = 1 + 5i$ einmal durch eine Rechnung und zum anderen anhand einer Zeichnung in der Gaussschen Zahlenebene.*

$z_1 z_2 = -8 + 12i$ und Abbildung 7 auf Seite 34.

4. *Gegeben sei die Zahl $z = 20 - 30i$. Berechne*

a) $\mathrm{Re}(z) \quad \left[= 20\right]$

b) $(\mathrm{Im}(z))^2 \quad \left[= (-30)^2 = 900\right]$

c) $|z| \quad \left[= \sqrt{400 + 900} = \sqrt{1300} = 10\sqrt{13} \approx 36{,}06\right]$

d) $z^* \quad \left[= 20 + 30i\right]$

e) $z^2 \quad \left[= (20 - 30i)^2 = 400 - 1200i - 900 = -500 - 1200i\right]$

f) $zz^* \quad \left[= (20 - 30i)\,(20 + 30i) = 400 + 900 = 1300\right]$

g) $\dfrac{1}{z} \quad \left[= \dfrac{1}{20 - 30i} = \dfrac{1}{20 - 30i} \cdot \dfrac{20 + 30i}{20 + 30i} = \dfrac{20 + 30i}{1300} = \dfrac{1}{65} + \dfrac{3}{130} i\right]$

5. *Bestimme alle Lösungen in $\mathbb{C}$.*

a) $(2 - 3i)\,z = -5$

$$z = \frac{-5}{2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{-10 - 15i}{13} = -\frac{10}{13} - \frac{15}{13} i$$

b) $x^2 = -4096$

Die beiden Lösungen sind $x_{1,2} = \pm 64i$

c) $x^2 + 4x + 44 = 0$

$(x + 2)^2 = -44 + 4 = -40$
Die beiden Lösungen sind $x_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{40}$.

6. *Welche geometrische Bedeutung hat die komplexe Funktion $z \longmapsto z^*$?*

Die Funktion $z \longmapsto z^*$ bedeutet genauer ausgeschrieben $x + iy \longmapsto x - iy$. Der Realteil bleibt erhalten, der Imaginärteil wechselt das Vorzeichen.

Geometrisch bedeutet das eine Spiegelung an der Re-Achse.

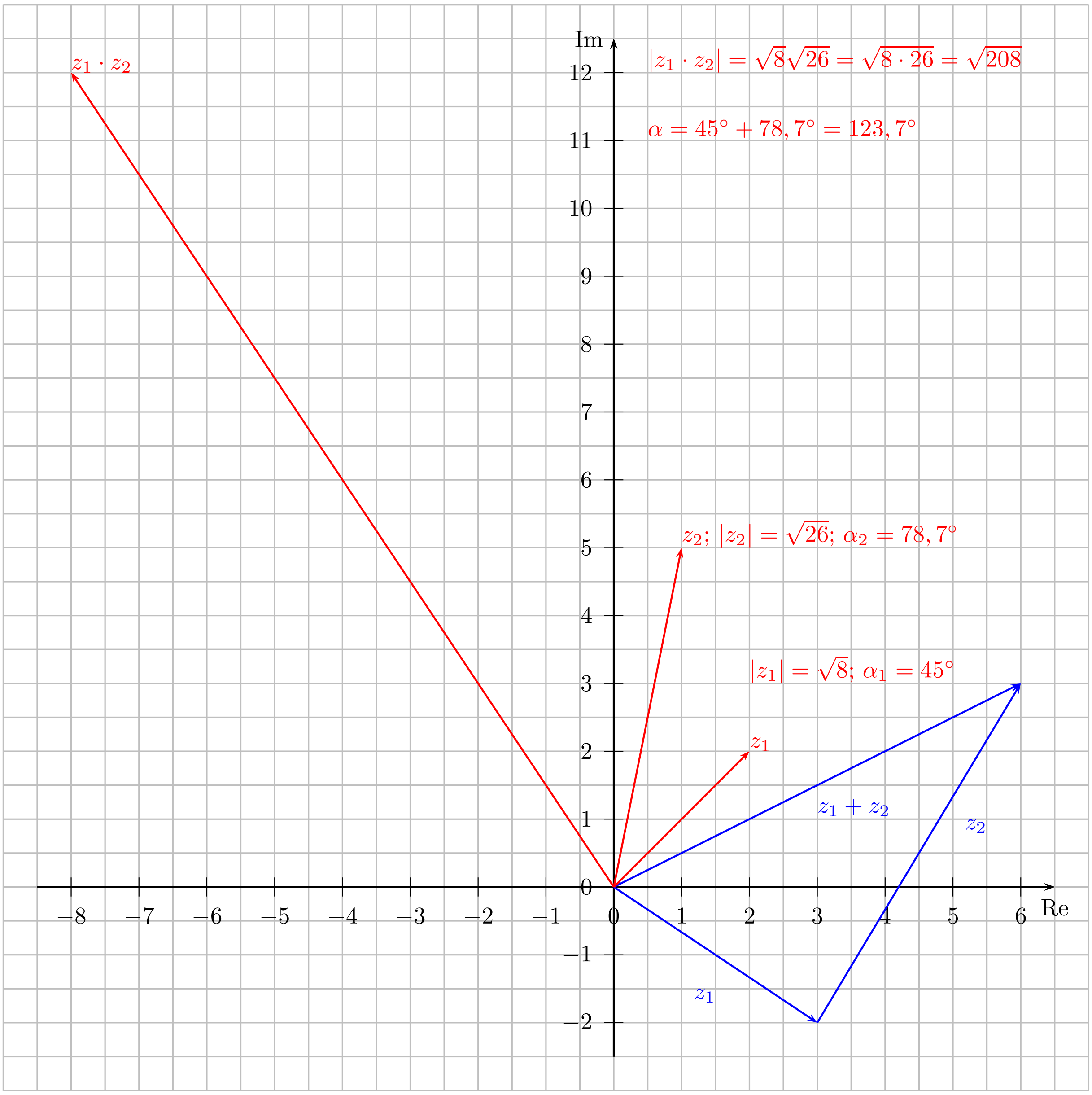

Abbildung 7: Zu Aufgabe 3a

Literatur

[1] http://photozeichen.de/toblog/index.php/komplexe-zahlen/25
Link vom 06.03.2014

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Nat%C3%BCrliche_Zahl.
Link vom 21.02.2014

[3] http://de.wikipedia.org/wiki/Vollst%C3%A4ndige_Induktion
Link vom 21.02.2014

[4] http://www.herder-oberschule.de/madincea/aufg0009/abzaehl.pdf
Link vom 22.02.2014

[5] http://de.wikipedia.org/wiki/Cantors_zweites_Diagonalargument
Link vom 23.02.2014

[6] http://de.wikipedia.org/wiki/Gau%C3%9Fsche_Zahlenebene
Link vom 28.02.2014

[7] http://de.wikipedia.org/wiki/Vektorraum
Link vom 28.02.2014