Hessesche Normalenform II

Axel Tobias, StD i. R.

14.01.2014

Inhaltsverzeichnis

1 Normalenformen

Vorbemerkung Grundsätzlich verweise ich zunächst auf die Inhalte in meinem Dokument Hessesche Normalenformen und Abstände. Allerdings verändere ich für meine Darstellungen die Bezeichnungsweise, die in dem eben genannten Dokument genau auf den aktuellen Unterricht bezogen war. Ich halte die von mir vorgezogene Bezeichnung und Darstellungsweise für durchgängiger und zweckmäßiger als die in den gängigen Schulbüchern verwendete Form. Sie wird auch in der Physik häufig verwendet. Um die Terminologie und Voraussetzungen genau nachlesen zu können, sind sie im Anhang ab Seite 20 ausführlich zusammengestellt.

Alle nachfolgenden Betrachtungen gelten in einer 3-dimensionalen EUKLIDischen Geometrie. d. h. es gibt ein Skalarprodukt und ein kartesisches Koordinatensystem.

1.1 Die Punkt-Normalenform – PNF

Hat man zu einer Ebene E einen Normalenvektor $\vec{n}$ und einen Punkt $A \in E$ mit Ortsvektor $\vec{r_A}$ gegeben, so berechnet sich die Punkt-Normalenform PNF zu

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_A}) = 0 \tag{PNF}$$

Dabei ist $\vec{r}$ ist der Ortsvektor eines beliebigen Punktes $P \in E$. Diese Gleichung ergibt sich daraus, dass der Normalenvektor und jeder Verbindungsvektor

$$\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{r_A}$$

zueinander senkrecht stehen.

1.2 Die Allgemeine Normalenform – ANF

Multipliziert man (PNF) aus, so erhält man die Allgemeine Normalenform ANF

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{r} - \vec{n} \cdot \vec{r_A} &= 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{r} - c &= 0 \end{aligned} \tag{ANF}$$

denn $\vec{n} \cdot \vec{r_A}$ ergibt eine reelle Zahl; sie sei c genannt. Der Unterschied zwischen der allgemeinen Normalenform und der Punkt-Normalenform besteht darin, dass man in (ANF) den Punkt, der die Ebene aus der Schar paralleler, zu $\vec{n}$ senkrechter Ebenen letztlich festlegt, nicht mehr erkennen kann.

1.3 Die Hessesche[1] Normalenform – HNF

Die Hessesche Normalenform (HNF) ist eine allgemeine Normalenform (ANF) mit einem Normalen*einheits*vektor $\vec{n}^{\,0}$, d. h. $|\vec{n}^{\,0}| = 1$ und $d \geq 0$.

$$\vec{n}^{\,0} \cdot \vec{r} - d = 0 \tag{HNF}$$

Die Gleichung (HNF) stellt die Hessesche Normalenform dar. In diesem Fall ist nämlich der Normalenvektor so orientiert, dass er *vom Nullpunkt P_0 auf die Ebene* zeigt. Ferner gibt $d \geq 0$ den *Abstand von P_0 von der Ebenen E* an:

$$d = d(P_0; E)$$

Der Nachweis dieser Eigenschaften erfolgt in Abschnitt 1.6.

1.4 Die Koordinatengleichung von Ebenen

ANF und damit HNF sind zur Koordinatenschreibweise von Ebenen gleichwertig. Wählt man $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, so folgt aus (ANF) nach Ausmultiplizieren des Skalarproduktes

$$n_x x + n_y y + n_z z = c$$

[1] Otto HESSE 1811–1874, deutscher Mathematiker

1.5 Beispiel

Gegeben seien $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $A(-2|1|0)$.

1. Dann lautet die PNF der durch $\vec{n}$ und A bestimmten Ebene E

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{r} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

2. Die ANF berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{r} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= 0 \\
\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} - (-2 - 3 - 0) &= 0 \\
E: \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} - (-5) &= 0 \qquad (1)
\end{aligned}$$

(1) kann man auch als Gleichung schreiben: $E: x - 3y - 2z = -5$.

3. Für die HNF bildet man $|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$ und beachtet, dass $d \geq 0$ sein muss:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} - \left(-\frac{5}{\sqrt{14}} \right) &= 0 \\
E: \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} - \frac{5}{\sqrt{14}} &= 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

In der Gleichung (2) zeigt der Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vom Nullpunkt auf die Ebene und der Abstand vom Nullpunkt beträgt $\frac{5}{\sqrt{14}} = \frac{5}{14} \cdot \sqrt{14}$.

1.6 Nachweis der Eigenschaften der HNF

1.6.1 Berechnung des Projektionsvektors

Will man die senkrechte Projektion $\vec{a}_{\vec{b}}$ eines Vektors $\vec{a}$ auf einen Vektor $\vec{b}$ berechnen (Abbildung 1 auf Seite 4), so ist nachstehende Beziehung nützlich

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2} \cdot \vec{b} \tag{3}$$

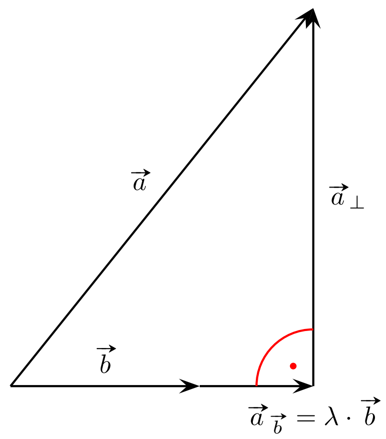


Abbildung 1: Zur Berechnung der senkrechten Projektion eines Vektors

In früheren Formelsammlungen[2] und Schulbüchern[3] war diese Formel noch zu finden. Sie ist letztlich ein Schritt innerhalb des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens[4]. Zunächst setzt man an mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{a}_{\perp} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} + \vec{a}_{\perp} \tag{4}$$

Dann kann man λ bestimmen, indem man das Skalarprodukt mit $\vec{b}$ bildet und dadurch der senkrechte Anteil $\vec{a}_{\perp}$ von $\vec{b}$ entfällt.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \left(\lambda \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{b} + \vec{a}_{\perp} \cdot \vec{b} \\ &= \lambda \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{b}\right) + \vec{a}_{\perp} \cdot \vec{b} \\ &= \lambda \cdot |\,\vec{b}\,|^2 + 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\,\vec{b}\,|^2} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2} \tag{5}$$

Die letzte Gleichung gilt natürlich nur für $\vec{b} \neq \vec{o}$. Allerdings ist eine Projektion auf den Nullvektor nicht sinnvoll.

---

[2] [1] Seite 16

[3] [2] Seite 200

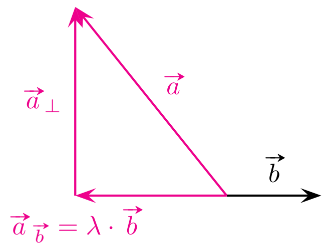
[4] [3] Damit zeigt man zum Beispiel, dass in jedem Euklidischen Vektorraum eine Orthonormalbasis existiert.

Schließlich ist dann

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\vec{b}} &= \lambda \cdot \vec{b} \\ &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2} \cdot \vec{b}\end{aligned}$$

Dies ist gerade die Aussage (3) auf Seite 4.

Hinweis: Der Ansatz gilt auch bei einem stumpfen Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



1.6.2 Der Abstand vom Nullpunkt

Wie aus Abbildung 2 auf Seite 5 ersichtlich ist, erhält man den Abstand vom Nullpunkt als Länge der senkrechten Projektion von $\vec{r}$ auf $\vec{n}^{\,0}$.

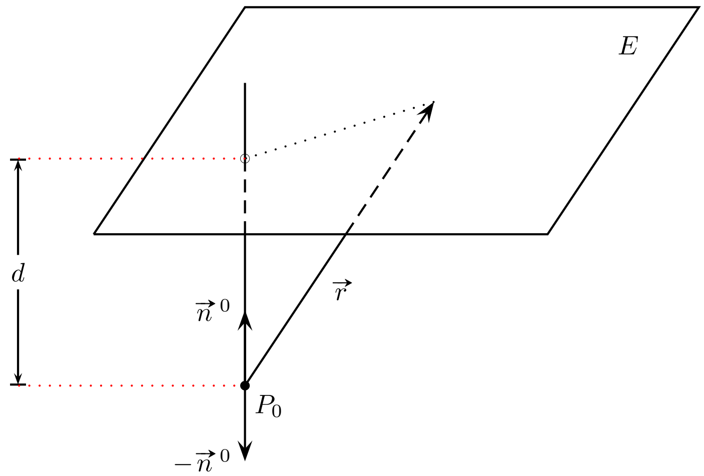


Abbildung 2: Abstand vom Nullpunkt und Orientierung des Normalenvektors

Aus Gleichung (3) auf Seite 4 ergibt sich dann

$$\begin{aligned}|\vec{r}_{\vec{n}^{\,0}}| &= \left| \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}^{\,0}}{|\vec{n}^{\,0}|^2} \cdot \vec{n}^{\,0} \right| \\ &= \left| \frac{d}{1^2} \cdot \vec{n}^{\,0} \right| \\ &= |d| \cdot \left| \vec{n}^{\,0} \right| \\ &= d\end{aligned}$$

Dabei ist die Definition (HNF) auf Seite 2 berücksichtigt worden: $\vec{n}^{\,0} \cdot \vec{r} - d = 0$ mit $|\vec{n}^{\,0}| = 1$ und $d \geq 0$.

1.7 Beispiele zur Projektionsformel

1.7.1 Ein mathematisches Beispiel

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme den Vektor, den man erhält, wenn man $\vec{a}$ an $\vec{b}$ „spiegelt".

Man macht sich die Situation zuerst einmal mit einer Zeichnung klar. Die Lösung lässt sich in diesem speziellen Fall auch geometrisch durch „Kästchenzählen" konstruieren. Rechnerisch ergibt sie sich auf folgendem Wege.

$$\begin{aligned}
\vec{c} &= \vec{a} + 2 \cdot \vec{h} \\
&= \vec{a} + 2 \cdot (-\vec{a} + \vec{a}_{\vec{b}}) \\
&= \vec{a} - 2 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{a}_{\vec{b}} \\
&= -\vec{a} + 2 \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b^2} \cdot \vec{b} \\
&= -\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{5 \cdot 4 + 10 \cdot 3}{4 \cdot 4 + 3 \cdot 3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

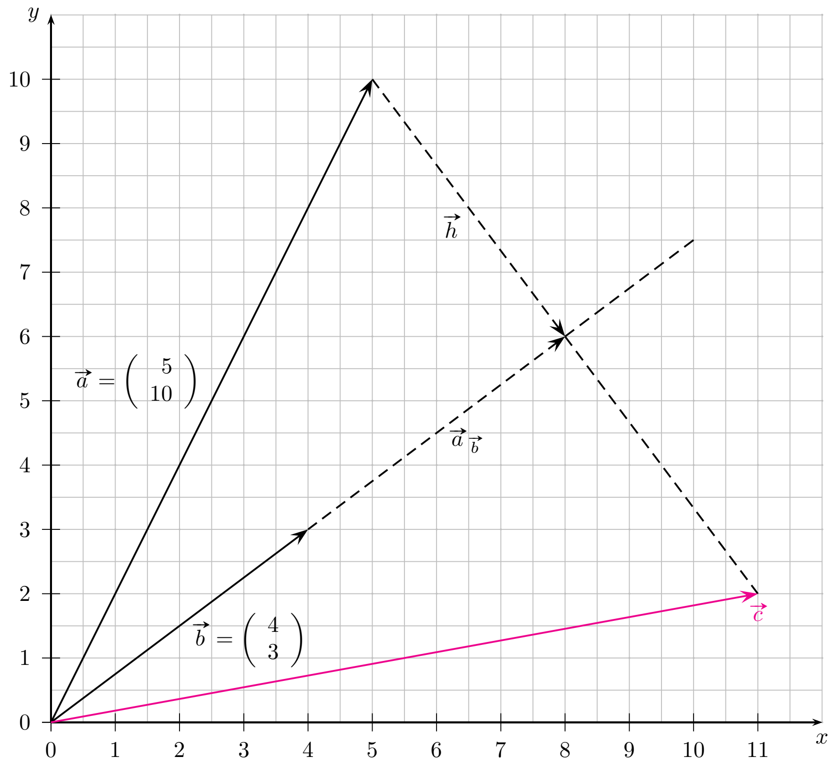


Abbildung 3: $\vec{a}$ wird an $\vec{b}$ gespiegelt.

1.7.2 Ein physikalisches Beispiel

Bereits in der Sekundarstufe I lernen die Schüler im Physikunterricht, dass die physikalische Größe Arbeit sich als Produkt aus Kraft in Wegrichtung und Weg berechnet:

$$W = F_s \cdot s \tag{6}$$

F_s bezeichnet den Anteil der Kraft $\vec{F}$ in Richtung des Weges $\vec{s}$, genauer die senkrechte Projektion der Kraft $\vec{F}$ auf den Weg $\vec{s}$ längs der die Kraft wirkt (vergleiche (3) auf Seite 4).

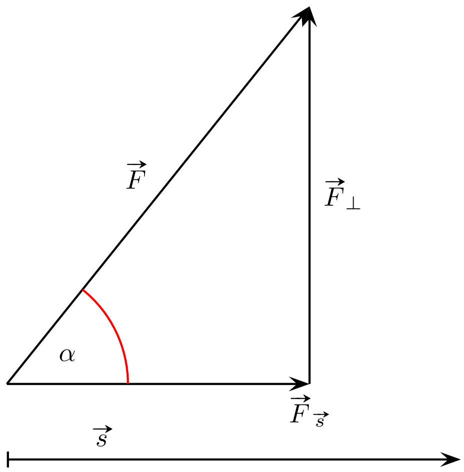


Abbildung 4: Zur Berechnung der Arbeit W

Allgemein gilt bei konstanter Kraft und geradlinigem Weg

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{s} \\ &= F \cdot s \cdot \cos \angle \left(\vec{F}; \vec{s}\right) \\ &= F \cdot s \cdot \cos \alpha \,. \end{aligned} \tag{7}$$

Beachtet man noch $\dfrac{F_{\vec{s}}}{F} = \cos \alpha$, also $F_{\vec{s}} = F \cdot \cos \alpha$, so erhält man aus (7)

$$W = F_{\vec{s}} \cdot s \,,$$

was gerade bis auf eine vereinfachte Bezeichnung der Gleichung (6) entspricht.

Sind nun $\vec{F} = \begin{pmatrix} 5\,\mathrm{N} \\ 10\,\mathrm{N} \\ -3\,\mathrm{N} \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1\,\mathrm{m} \\ 11\,\mathrm{m} \\ 1\,\mathrm{m} \end{pmatrix}$ gegeben, so folgt

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{25 + 100 + 9}\,\mathrm{N} \approx 11{,}6\,\mathrm{N} \\ s &= \sqrt{1 + 121 + 1}\,\mathrm{m} \approx 11{,}1\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Es gilt aber **nicht** $W = F \cdot s = 11{,}6\,\mathrm{N} \cdot 11{,}1\,\mathrm{m} = 129\,\mathrm{Nm} = 129\,\mathrm{J}$, sondern gemäß

Gleichung (3) auf Seite 4)

$$\begin{aligned}
W &= F_{\vec{s}} \cdot s \\
&= \left| \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{s^2} \cdot \vec{s} \right| \cdot s \\
&= \left| \frac{(5+110-3)\ \mathrm{J}}{123\,\mathrm{m}^2} \cdot \begin{pmatrix} 1\,\mathrm{m} \\ 11\,\mathrm{m} \\ 1\,\mathrm{m} \end{pmatrix} \right| \cdot \sqrt{123}\,\mathrm{m} \\
&= \frac{112\,\mathrm{J}}{123\,\mathrm{m}^2} \cdot \sqrt{123}\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{123}\,\mathrm{m} = 112\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

Selbstverständlich benutzt man normalerweise das Skalarprodukt zur Berechnung der Arbeit.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (5+110-3)\ \mathrm{Nm} = 112\,\mathrm{J}$$

In diesem Beispiel ging es aber um die Darstellung des Projektionsvektors der Kraft und die Berechnung der Arbeit über die Definition (6) auf Seite 7.

$$\vec{F}_{\vec{s}} = \frac{112\,\mathrm{Nm}}{123\,\mathrm{m}^2} \cdot \begin{pmatrix} 1\,\mathrm{m} \\ 11\,\mathrm{m} \\ 1\,\mathrm{m} \end{pmatrix} = \frac{112}{123}\,\mathrm{N} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun zeigt die Beispielrechnung, dass man auch ohne Winkelbetrachtung zur allgemeinen Definition der Arbeit gelangen kann, denn sie steckt im Skalarprodukt drin. Dazu betrachten wir den Sachverhalt allgemein.

$$\begin{aligned}
W &= F_{\vec{s}} \cdot s \\
&= \left| \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{s^2} \cdot \vec{s} \right| \cdot s \\
&= \left| \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{s^2} \right| \cdot |\vec{s}| \cdot s \\
&= \left| \vec{F} \cdot \vec{s} \right|
\end{aligned}$$

Offenbar ist aber die Definition (6) auf Seite 7 doch nicht ganz vollständig, denn für den Fall, dass das Skalarprodukt negativ ist, sind Vektoren $F_{\vec{s}}$ und $\vec{s}$ entgegengesetzt orientiert, ein physikalisches System verliert also Arbeit (Energie).

2 Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Ebene

Die Eigenschaften der Hesseschen Normalenform erlauben jetzt eine einfache Betrachtung des Abstandes $d(P;E)$ eines Punktes von einer Ebene.

2.1 Herleitung

Gegeben seien eine Ebene $E:\ \vec{n}^{\,0} \cdot \vec{r} - d = 0$ und ein Punkt P_1. Dieser Punkt bestimmt eine zu E parallele zweite (Hilfs-) Ebene E_1, deren Hessesche Normalenform sich berechnet zu $E_1:\ \vec{n}^{\,0} \cdot \vec{r} - d_1 = 0$ (Abbildung 5 auf Seite 9). Für d_1 gilt $d_1 = \vec{n}^{\,0} \cdot \vec{r_1}$. Dabei ist $\vec{r_1}$ der Ortsvektor des Punktes $P_1 \in E_1$.

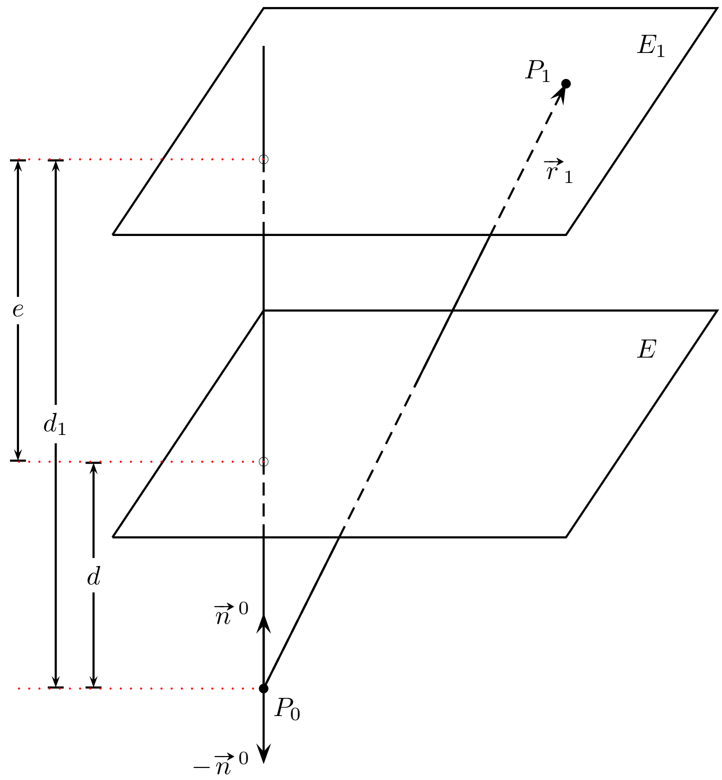


Abbildung 5: Zur Berechnung des Abstandes eines Punktes P_1 von einer Ebene E

Offenbar gilt

$$e = d_1 - d = \vec{n}^{\,0} \cdot \vec{r}_1 - d \tag{8}$$

e bedeutet noch nicht den Abstand des Punktes P_1 von E, da e auch negativ sein kann. Grundsätzlich kann man 3 Fälle unterscheiden:

1. $e = 0$, falls $P_1 \in E$;
2. $e > 0$, falls P_1 und P_0 auf verschiedenen Seiten von E liegen;
3. $e < 0$, falls P_1 und P_0 auf derselben Seite von E liegen.

Der (positive) Abstand eines Punktes P_1 mit dem Ortsvektor $\vec{r}_1$ von der Ebene E beträgt

$$d(P_1; E) = |e| = \left| \vec{n}^{\,0} \cdot \vec{r}_1 - d \right|$$

Dabei erscheint der rechte Teil der Gleichung als HNF von E mit den eingesetzten Koordinaten von P_1.

Tipp: Man berechnet zunächst e (siehe (8)), indem man die Koordinaten des Ortsvektors von P_1 in die HNF von E einsetzt. Der Betrag des Ergebnisses stellt den Abstand des Punktes P_1 von E dar. Das Vorzeichen von e liefert Informationen über die gegenseitige Lage von P_1, P_0 und E.

Hinweis: Man könnte meinen, dass der nachstehend skizzierte Fall nicht in den Betrachtungen eingeschlossen ist (Abbildung 6 auf Seite 10).

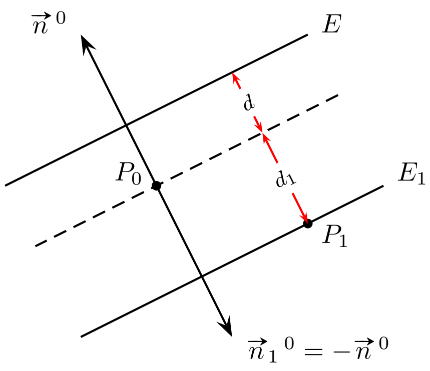


Abbildung 6: Betrachtung einer Abstandssumme

Nun gilt aber mit $d, d_1 \geq 0)$

$$
\begin{aligned}
|e| &= |d_1 + d| \\
&= \left|\vec{n}_1^{\,0} \cdot \vec{r}_1 + d\right| \\
&= \left|-\vec{n}^{\,0} \cdot \vec{r}_1 + d\right| \\
&= \left|d - \vec{n}^{\,0} \cdot \vec{r}_1\right| \\
&= |\underbrace{\vec{n}^{\,0} \cdot \vec{r}_1 - d}_{<0}|
\end{aligned}
$$

2.2 Beispiele

2.2.1 Abstand vom Nullpunkt

1. Bestimme die HNF und ermittle den Abstand vom Nullpunkt.

$$E : \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} + 26 = 0$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $n = \sqrt{144 + 9 + 16} = 13$. Damit ist $\vec{n}^0 = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
E : \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} + 2 = 0 \\
E : \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} - 2 = 0
\end{aligned}
$$

Die letzte Zeile stellt die HNF von E dar und der Abstand vom Nullpunkt ist $d = 2$.

2. Gegeben sei die Ebene E durch $E : -3x + 4z = -10$. In einer 3-dimensionalen Geometrie bedeutet E eine zur y-Achse parallele Ebene (y ist beliebig wählbar).

In einer 2-dimensionalen Geometrie bedeutet E eine Gerade in einer xz-Ebene und lässt sich als solche auch 2-dimensional darstellen – im Prinzip also aus 3-dimensionaler Sicht ein ebener Schnitt von E mit der xz-Ebene (Abbildung 7 auf Seite 11).

$$E: \; -3x + 4z = -10$$
$$z = \frac{3}{4}x - 2{,}5$$

Diese Form eignet sich gut zum Zeichnen.

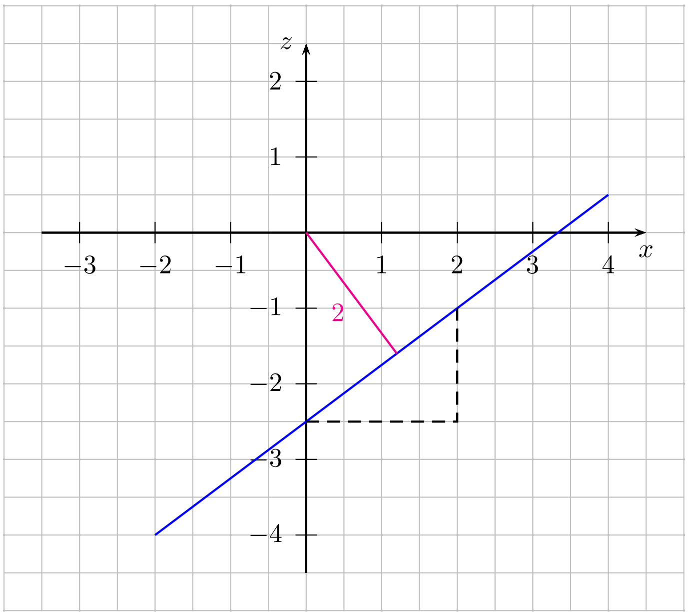


Abbildung 7: $E: \; -3x + 4z = -10$

Die HNF sieht so aus:

$$E: \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} + 10 = 0$$
$$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} - 2 = 0$$

Der Abstand vom Nullpunkt beträgt also 2.

2.2.2 Die Höhen im Dreieck

1. Gegeben seien die Punkte $P_1(5|6)$, $P_2(-2|4)$ und $P_3(6|-1)$. Sie bestimmen ein Dreieck $P_1P_2P_3$. Berechne den Abstand der Eckpunkte von den gegenüberliegenden Seiten (Längen der Höhen im Dreieck).

a) Parametergleichungen der Geraden:

$$g_1(P_2P_3):\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$
$$g_2(P_3P_1):\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$g_3(P_1P_2):\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Koordinatengleichungen der Geraden (durch Ersetzen des Parameters λ):

$$\begin{aligned} g_1 &: & 5x + 8y &= 22 \\ g_2 &: & 7x + y &= 41 \\ g_3 &: & -2x + 7y &= 32 \end{aligned}$$

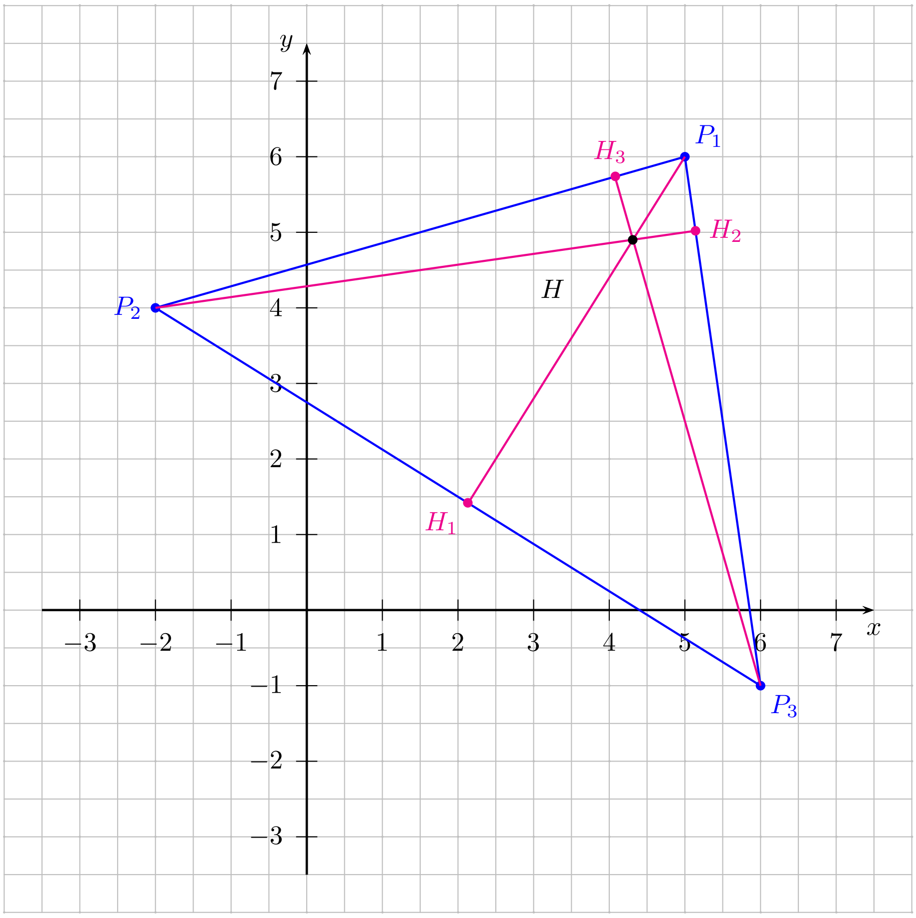


Abbildung 8: Länge der Höhen im Dreieck

c) HNF (Division durch die Länge des Normalenvektors):

$$g_1: \frac{1}{\sqrt{89}}\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}\cdot\vec{r}-\frac{22}{\sqrt{89}}=0$$

$$g_2: \frac{1}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{r}-\frac{41}{\sqrt{50}}=0$$

$$g_3: \frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}\cdot\vec{r}-\frac{32}{\sqrt{53}}=0$$

d) Abstände:

$$d(g_1;P_1):\ e_2=\frac{1}{\sqrt{89}}\begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}-\frac{22}{\sqrt{89}}=\frac{51}{\sqrt{89}}\approx 5{,}41$$

$$d(g_2;P_2):\ e_3=\frac{1}{\sqrt{50}}\cdot\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}-\frac{41}{\sqrt{50}}=-\frac{51}{\sqrt{50}}\approx -7{,}21$$

$$d(g_3;P_3):\ e_1=\frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}-\frac{32}{\sqrt{53}}=-\frac{51}{\sqrt{53}}\approx -7{,}01$$

Für die Abstände (Längen der Höhen im Dreieck) gilt

$$d\left(g_i;P_i\right)=|e_i|\ \text{ für } i\in\{1{,}2{,}3\}\,.$$

e) Zeichnung (siehe Abbildung 8 auf Seite 12)

f) Eine interessante Ergänzung zu einer Eigenschaft der Höhen, die auch nicht jedem bekannt ist, soll hier noch erfolgen.

> **Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Umkreises des Umdreiecks.**
>
> Dabei erhält man das sogenannte „Umdreieck“, indem man jeweils die Parallelen zu den Seiten eines Dreiecks durch die gegenüberliegenden Eckpunkte zeichnet, deren Schnittpunkte die Eckpunkte des Umdreiecks bestimmen.

In der Abbildung 9 auf Seite 14 ist dieser Sachverhalt dargestellt. Eine Rechnung dazu ist nachfolgend für dieses Beispiel ausgeführt.

i. Man beachte die Orientierung des Normalenvektors.

$$\begin{aligned}\vec{r}_{H_1}&=\vec{r}_{P_1}+\frac{51}{\sqrt{89}}\cdot\left(-\vec{n}^{\,0}\right)_{(g_1)}\\&=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}+\frac{51}{\sqrt{89}}\cdot\frac{1}{\sqrt{89}}\cdot\begin{pmatrix}-5\\-8\end{pmatrix}=\frac{1}{89}\cdot\begin{pmatrix}190\\126\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}2{,}13\\1{,}42\end{pmatrix}\\\vec{r}_{H_2}&=\vec{r}_{P_2}+\frac{51}{\sqrt{50}}\cdot\vec{n}^{\,0}_{(g_2)}\\&=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}+\frac{51}{\sqrt{50}}\cdot\frac{1}{\sqrt{50}}\cdot\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{50}\cdot\begin{pmatrix}257\\251\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}5{,}14\\5{,}02\end{pmatrix}\\\vec{r}_{H_3}&=\vec{r}_{P_3}+\frac{51}{\sqrt{53}}\cdot\vec{n}^{\,0}_{(g_3)}\\&=\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}+\frac{51}{\sqrt{53}}\cdot\frac{1}{\sqrt{53}}\cdot\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}=\frac{1}{53}\cdot\begin{pmatrix}216\\304\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}4{,}08\\5{,}74\end{pmatrix}\end{aligned}$$

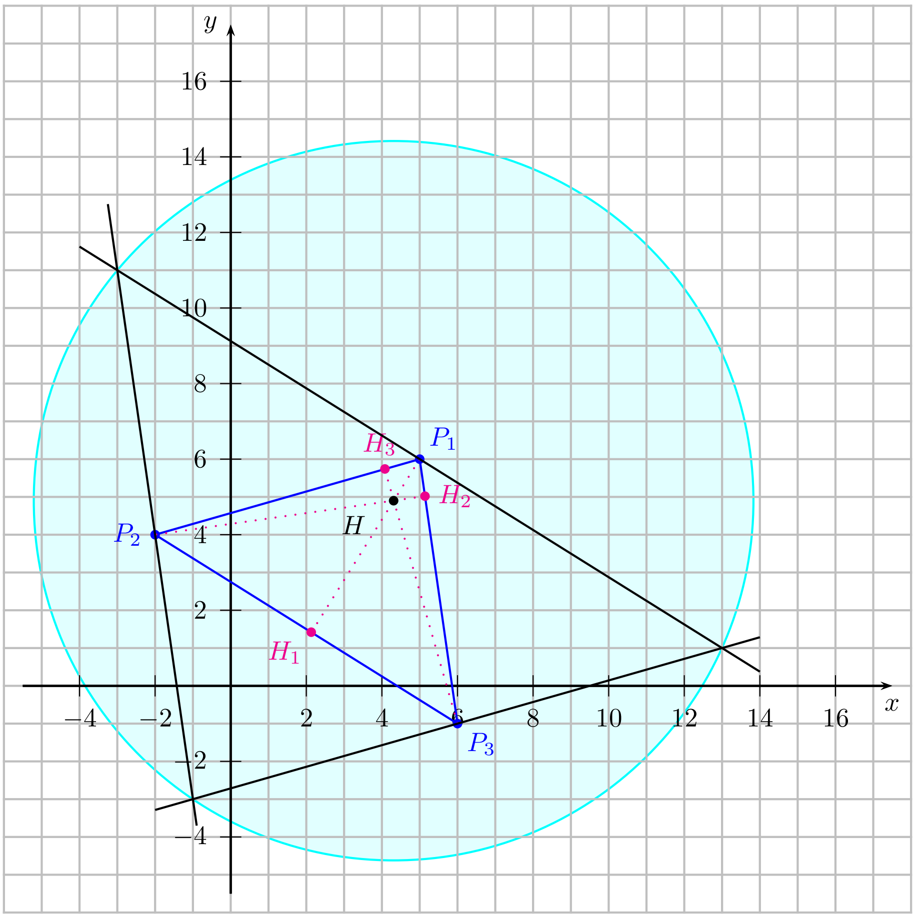


Abbildung 9: Der Höhenschnittpunkt als Mittelpunkt des Umkreises des Umdreiecks

ii. Die nachfolgenden Parametergleichungen beschreiben die jeweiligen Höhen:

$$g(P_1H_1):\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \frac{1}{89} \cdot \begin{pmatrix} -255 \\ -408 \end{pmatrix}$$

$$g(P_2H_2):\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 357 \\ 51 \end{pmatrix}$$

$$g(P_3H_3):\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \frac{1}{53} \cdot \begin{pmatrix} -102 \\ 357 \end{pmatrix}$$

iii. Bestimmung von $H = g(P_1H_1) \cap g(P_2H_2)$:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \frac{1}{89} \cdot \begin{pmatrix} -255 \\ -408 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 357 \\ 51 \end{pmatrix}$$

$$\frac{255}{89}\lambda + \frac{357}{50}\mu = 7$$

$$\frac{408}{89}\lambda + \frac{51}{50}\mu = 2$$

$$\lambda = \frac{623}{2601} \approx 0{,}240 \qquad \mu = \frac{2300}{2601} \approx 0{,}884$$

Damit erhält man für den Schnittpunkt H:

$$\vec{r}_H = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{623}{2601} \cdot \frac{1}{89} \cdot \begin{pmatrix} -255 \\ -408 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{220}{51} \\ \frac{250}{51} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4{,}31 \\ 4{,}90 \end{pmatrix}$$

iv. Test, dass auch $H \in g(P_3H_3)$ gilt:

$$\begin{pmatrix} \frac{220}{51} \\ \frac{250}{51} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \frac{1}{53} \cdot \begin{pmatrix} -102 \\ 357 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung ist für $\lambda = \frac{2279}{2601} \approx 0{,}876$ erfüllt.

Fazit: Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkt $H\left(\frac{220}{51} \middle| \frac{250}{51}\right) \approx H\,(4{,}31\,|4{,}90\,)$.

v. Seitenparallele Geraden durch den gegenüberliegenden Eckpunkt.

$$g(P_1;\| \, g_1): \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$g(P_2;\| \, g_2): \ \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$g(P_3;\| \, g_3): \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

vi. Eckpunkte des Umdreiecks:

$U_1 = (P_2;\| \, g_2) \cap g(P_3;\| \, g_3)$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{51} & \frac{7}{51} \\ \frac{7}{51} & \frac{1}{51} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{51} & \frac{7}{51} \\ \frac{7}{51} & \frac{1}{51} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{U_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$U_2 = (P_3;\| \, g_3) \cap g(P_1;\| \, g_1)$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{51} & -\frac{8}{51} \\ -\frac{2}{51} & \frac{7}{51} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{51} & -\frac{8}{51} \\ -\frac{2}{51} & \frac{7}{51} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{U_2} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$U_3 = (P_1; \parallel g_1) \cap g(P_2; \parallel g_2)$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{51} & \frac{1}{51} \\ -\frac{5}{51} & -\frac{8}{51} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{51} & \frac{1}{51} \\ -\frac{5}{51} & -\frac{8}{51} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{U_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

vii. Entfernung der Punkte U_i für $I \in \{1{,}2{,}3\}$ von H:

$$\begin{aligned}
d(U_1; H) &= \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{220}{51} \\ \frac{250}{51} \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{\begin{pmatrix} -\frac{271}{51} \\ -\frac{403}{51} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{271}{51} \\ -\frac{403}{51} \end{pmatrix}} = \frac{5}{51} \cdot \sqrt{9434} \\
d(U_2; H) &= \left| \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{220}{51} \\ \frac{250}{51} \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{443}{51} \\ -\frac{199}{51} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{443}{51} \\ -\frac{199}{51} \end{pmatrix}} = \frac{5}{51} \cdot \sqrt{9434} \\
d(U_3; H) &= \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{220}{51} \\ \frac{250}{51} \end{pmatrix} \right| \\
&= \sqrt{\begin{pmatrix} -\frac{373}{51} \\ \frac{311}{51} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{373}{51} \\ \frac{311}{51} \end{pmatrix}} = \frac{5}{51} \cdot \sqrt{9434} \approx 9{,}52
\end{aligned}$$

2.2.3 Bestimmung einer Gerade durch Abstandsvorgabe

Gegeben seien die Punkte $A(8|5)$ und $B(3|7)$. Berechne eine Koordinaten- und eine Parametergleichung der Gerade g, die durch A verläuft und von B den Abstand $|e|$ mit $e = -5$ hat (vergleiche (8) auf Seite 9). Zu der Rechnung soll ebenfalls eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal erfolgen.

Zunächst fertigt man sinnvoller Weise eine Konstruktion an (Abbildung 10 auf Seite **??**).

Konstruktionsbeschreibung:

a) Zeichne die Punkte $A(8|5)$ und $B(3|7)$.

b) Zeichne einen Kreis um B mit dem Radius $r = 5$: K_1.

c) Konstruiere die Tangenten von A an K_1. Diese Konstruktion gliedert sich wie folgt:

   i. Konstruktion des Mittelpunktes der Strecke $\overline{AB}$: M

   ii. Kreis um M mit Radius Länge $\overline{MB}$ (*Thales*kreis): K_2

iii. Kreis K_2 schneidet K_1 in P_1 und P_2

d) $g_1(AP_1)$ und $g_2(AP_2)$ sind die gesuchten Geraden.

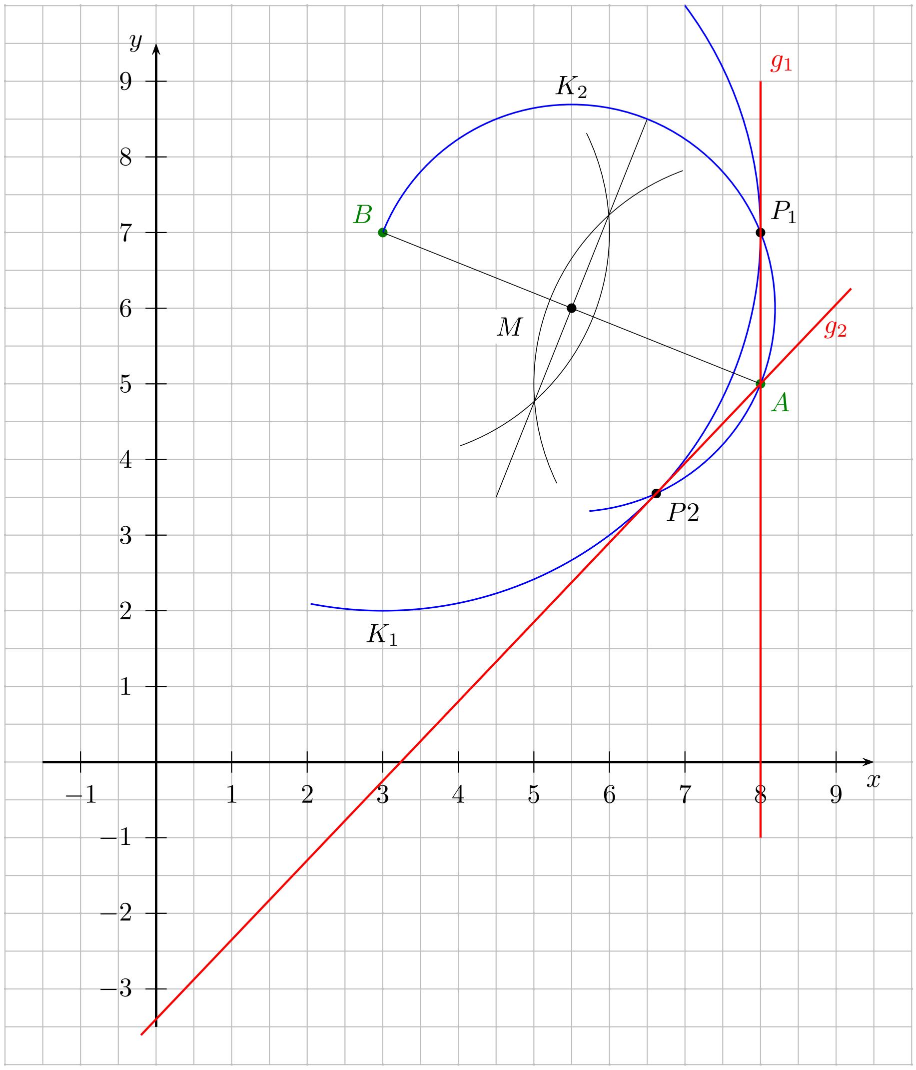


Abbildung 10: Zu Aufgabe 2.2.3 auf Seite 16

Analytische Betrachtung:

Die HNF der zu bestimmenden Geradengleichung erlaubt es, den Abstand des Punktes B in Gleichung (9) darzustellen. Da e nach Aufgabenstellung negativ ist, wird vorgegeben, dass P_0 und B auf derselben Seite der Gerade liegen; andernfalls wäre keine Lösung möglich[5]. In (10) wird benutzt, dass $A \in g$, der Abstand von g also Null ist.

$$\vec{n}^{\,0} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} - d = -5 = e \tag{9}$$

$$\vec{n}^{\,0} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} - d = 0 \tag{10}$$

[5]Wählt man $e = +5$, so ergeben sich als Lösungen nur die entsprechenden negativen Werte von d, was im Widerspruch zu $d \geq 0$ steht; siehe dazu die Definition HNF auf Seite 2.

Setzt man $\vec{n}^{\,0} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$, so ergibt sich aus der Differenz (9) − (10) die Gleichung

$$\begin{aligned} 3n_x + 7n_y - 8n_x - 5n_y &= -5 \\ -5n_x + 2n_y &= -5 \\ n_x &= 1 + \frac{2}{5} \cdot n_y \end{aligned} \tag{11}$$

Ferner hat man die Bedingung $n_x^2 + n_y^2 = 1$, denn $\vec{n}^{\,0}$ stellt einen Normalen*einheits*vektor dar. Daher folgt mit (11)

$$\begin{aligned} n_x^2 + n_y^2 &= 1 \\ \left(1 + \frac{2}{5} \cdot n_y\right)^2 + n_y^2 &= 1 \\ 1 + \frac{4}{5} \cdot n_y + \frac{4}{25} \cdot n_y^2 + n_y^2 &= 1 \\ \frac{29}{25} \cdot n_y^2 + \frac{4}{5} \cdot n_y &= 0 \\ n_y \cdot \left(\frac{29}{25} \cdot n_y + \frac{4}{5}\right) &= 0 \end{aligned}$$

1. Fall $n_y = 0$; dann ist wegen (11) $n_x = 1$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} - d &= 0 \\ d &= 8 \end{aligned}$$

Damit lautet eine Koordinatengleichung (hier die HNF)

$$\begin{aligned} g_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} - 8 &= 0 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Eine Parametergleichung ist

$$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

denn $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \vec{n}$.

2. Fall $n_y = -\frac{20}{29}$; dann ist wegen (11) $n_x = \frac{21}{29}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} - d &= 0 \\ d &= \frac{68}{29} \end{aligned}$$

Damit lautet eine Koordinatengleichung (hier die HNF)

$$g_1: \frac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \vec{r} - \frac{68}{29} = 0$$
$$\frac{21}{29}x - \frac{20}{29}y = \frac{68}{29}$$

Eine Parametergleichung ist

$$g_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 21 \end{pmatrix},$$

denn $\begin{pmatrix} 20 \\ 21 \end{pmatrix} \perp \vec{n}$.

Schließlich sollen noch der Vollständigkeit halber die Koordinaten von P_1 und P_2 analytisch angegeben werden: Wegen der Aufgabenstellung gilt trivialerweise $P_1(8|7)$. P_2 erhält man als (einzigen) Schnittpunkt von g_2 mit K_1:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-7)^2 &= 25 && \text{(Kreis)} \\ 21x - 20y &= 68 && \text{(Gerade)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{21} \cdot (68 + 20y) &= x \\ \left(\frac{1}{21} \cdot (68 + 20y) - 3\right)^2 + (y-7)^2 &= 25 \\ \left(\frac{20}{21}y + \frac{5}{21}\right)^2 + (y-7)^2 &= 25 \\ \frac{400}{441}y^2 + \frac{200}{441}y + \frac{25}{441} + y^2 - 14y + 49 &= 25 \\ 841y^2 - 5974y + 10609 &= 0 \\ y &= \frac{103}{29} \approx 3{,}55 && \text{(1 Lsg.)} \\ x &= \frac{192}{29} \approx 6{,}62 \end{aligned}$$

Daher ist schließlich $P_2\left(\frac{192}{29} \,|\, \frac{103}{29}\right) \approx P_2\,(6{,}62 \,|\, 3{,}55)$.

Anhang

Vektoren als Elemente eines (reellen) Vektorraumes werden mit kleinen Buchstaben und Pfeil $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$, reelle Zahlen mit griechischen Buchstaben[6] $\lambda, \mu, \varrho, \sigma, \ldots$ dargestellt.

Ein 3-dimensionales affines Koordinatensystem (KOS) einer 3-dimensionalen affinen Geometrie besteht aus einem fest gewählten Nullpunkt P_0 und 3 Basisvektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, also 3 linear unabhängigen Vektoren des der Geometrie zugrunde liegenden Vektorraumes. [7]

Der Ortsvektor $\vec{r}_A$ eines Punktes A ist der Verbindungsvektor von P_0 mit A. [8]

$$\overrightarrow{P_0A} = \vec{r}_A = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \varrho \end{pmatrix} = \lambda \cdot \vec{b}_1 + \mu \cdot \vec{b}_2 + \varrho \cdot \vec{b}_3$$

Die Koordinaten eines Punktes A bezüglich des KOS sind die Koordinaten des Ortsvektors von A bezüglich der mit dem KOS gewählten Basis $\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$ des Vektorraumes:

$$A(\lambda|\mu|\varrho)$$

Die Koordinaten eines beliebigen Ortsvektors (etwa bei Parametergleichungen) wird mit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

Gibt es im Vektorraum ein Skalarprodukt, so spricht man von einer EUKLIDischen Geometrie. Man kann dann von Beträgen und Winkel zwischen Vektoren bzw. Längen von Strecken und Winkel etwa in einem Dreieck sprechen.

Einem kartesischen KOS in einer EUKLIDischen Geometrie liegt eine Orthonormalbasis (ONB) zugrunde. Dabei bedeutet ONB, dass die drei Basisvektoren alle den Betrag 1 haben (Einheitsvektoren) und paarweise aufeinander senkrecht stehen (Skalarprodukt ist Null).

Das Standardskalarprodukt berechnet sich gemäß

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \tag{12}$$

Dabei stehen in den Spalten die Koordinaten der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ bezüglich einer ONB.

Da ein Skalarprodukt auch durch

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\left(\angle\left(\vec{v}; \vec{w}\right)\right) = v \cdot w \cdot \cos\left(\angle\left(\vec{v}; \vec{w}\right)\right) \tag{13}$$

[6] lies: lambda, mü, rho, sigma, ...

[7] **Merke:** Punkte sind keine Vektoren.

[8] In einer affinen Geometrie existiert zu je zwei Punkten A, B ein Vektor $\vec{v}$, der „Verbindungsvektor“ $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

dargestellt werden kann, lassen sich mit (13) und (12) Beträge[9] und Winkel angeben:

$$\begin{aligned}
\vec{v} \cdot \vec{v} &= |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\angle\left(\vec{v}; \vec{v}\right)\right) \\
&= |\vec{v}|^2 \cdot \cos 0 \\
\vec{v} \cdot \vec{v} &= |\vec{v}|^2 = v^2
\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

$$\text{und} \qquad \cos\left(\angle\left(\vec{v}; \vec{w}\right)\right) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v \cdot w}$$

[9] Für den Betrag der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ schreibt man sehr oft einfach $a, b, c, \ldots$ statt $|\vec{a}|, \left|\vec{b}\right| \; |\vec{c}| \; \ldots .$

Literatur

[1] H. Sieber. *Mathematische Begriffe und Formeln*. Ernst Klett Verlag. Klett-Nr. 7124. $1991^{3}2$

[2] Krämer · Höwelmann · Klemisch. *Analytische Geometrie und Lineare Algebra*. Verlag Moritz Diesterweg Frankfurt am Main. Diesterweg 5301. 1989

[3] Wikipedia: Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren. 13.12.2013