Hessesche Normalenform

Axel Tobias, StD i. R.

14. Januar 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Normalenformen

1.1 Die Punkt-Normalenform – PNF

Hat man zu einer Ebene E einen Normalenvektor $\vec{n}$ und einen Punkt $P \in E$ mit Ortsvektor $\vec{p}$ gegeben, so berechnet sich die Punkt-Normalenform PNF zu

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \tag{PNF}$$

Dabei ist $\vec{x}$ ist der Ortsvektor eines beliebigen Punktes $X \in E$. Diese Gleichung ergibt sich daraus, dass der Normalenvektor und jeder Verbindungsvektor

$$\overrightarrow{PX} = \vec{x} - \vec{p} \tag{1}$$

zueinander senkrecht stehen.

1.2 Die Allgemeine Normalenform – ANF

Multipliziert man (PNF) aus, so erhält man die Allgemeine Normalenform ANF

$$\vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{p} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{x} - c = 0 \tag{ANF}$$

denn $\vec{n} \cdot \vec{p}$ ergibt eine reelle Zahl; sie sei c genannt. Der Unterschied zwischen der allgemeinen Normalenform und der Punkt-Normalenform besteht darin, dass man in (ANF) den Punkt, der die Ebene aus der Schar paralleler, zu $\vec{n}$ senkrechter Ebenen letztlich festlegt, nicht mehr erkennen kann.

1.3 Die Hessesche[1] Normalenform – HNF

Die Hessesche Normalenform (HNF) ist eine allgemeine Normalenform (ANF) mit einem Normalen*einheits*vektor $\vec{n_0}$ mit $|\vec{n_0}| = 1$ und $c \geq 0$.

$$\vec{n_0} \cdot \vec{x} - c = 0 \tag{HNF}$$

1.4 Die Koordinatengleichung von Ebenen

ANF und damit HNF sind zur Koordinatenschreibweise von Ebenen gleichwertig. Wählt man $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ so folgt aus (ANF) nach Ausmultiplizieren des Skalarproduktes

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = c \tag{3}$$

1.5 Beispiel

Gegeben seien $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $P(-2|1|0)$.

1. Dann lautet die PNF

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \tag{4}$$

2. Die ANF berechnet sich zu

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - (-2 - 3 - 0) = 0 \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - (-5) = 0 \tag{8}$$

(8) kann man auch als Gleichung schreiben: $x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5$.

[1] Otto Hesse 1811–1874, deutscher Mathematiker

3. Für die HNF bildet man $|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$ und beachtet, dass $c \geq 0$ sein muss:

$$\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \left(\frac{-5}{\sqrt{14}} \right) = 0 \tag{9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \left(\frac{5}{\sqrt{14}} \right) = 0 \tag{10}$$

Die letzte Gleichung stellt die Hessesche Normalenform dar. In diesem Fall ist nämlich der Normalenvektor so orientiert, dass er **vom Nullpunkt auf die Ebene** zeigt.

Begründung Man betrachte im Folgenden die Abbildung 1 auf Seite 3. φ sei der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{n_0}$. Das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{n_0} \cdot \vec{x} &= |\vec{n_0}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos\varphi & (11) \\ &= 1 \cdot |\vec{x}| \cdot \cos\varphi & (12) \end{aligned}$$

ist positiv genau dann, wenn der Winkel φ zwischen $0°$ und $90°$ liegt.

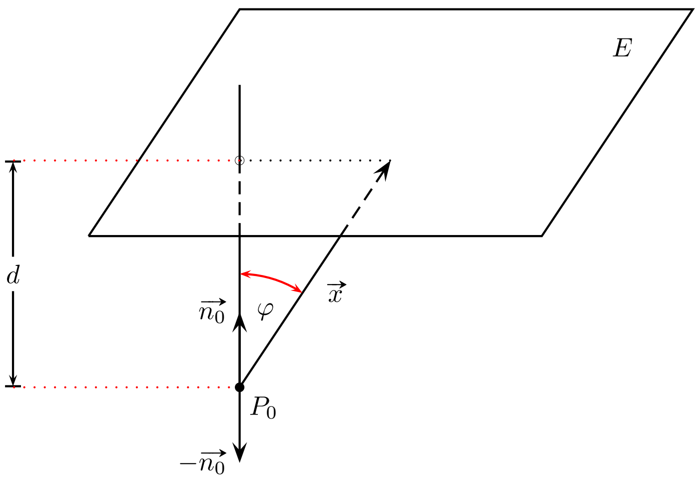

Abbildung 1: Zur Betrachtung der Orientierung des Normalenvektors

Weiß man schließlich noch, dass $\cos\varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{d}{|\vec{x}|}$ gilt, so lässt sich die Zahl $c = \frac{5}{\sqrt{14}}$ (siehe (10)) als Abstand der Ebene vom Nullpunkt interpretieren, denn

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sqrt{14}} &= |\vec{n_0}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos\varphi & (13) \\ &= \quad |\vec{x}| \cdot \cos\varphi = d & (14) \end{aligned}$$

1.6 Fazit

Die Hessesche Normalenform ist eine allgemeine Normalenform mit einem Normaleneinheitsvektor $\overrightarrow{n_0}$ mit $|\overrightarrow{n_0}| = 1$ und $c \geq 0$.

$$\overrightarrow{n_0} \cdot \overrightarrow{x} - c = 0 \tag{15}$$

Dabei gibt c den Abstand der Ebene vom Nullpunkt an und der Normalenvektor $\overrightarrow{n_0}$ weist vom Nullpunkt P_0 auf die Ebene.

2 Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Ebene

Benutzt man die HNF $\overrightarrow{n_0} \cdot \overrightarrow{x} - c = 0$, so ermittelt man des Abstand eines Punktes Q von der Ebene *wie im Unterricht dargestellt*[2] wie folgt.

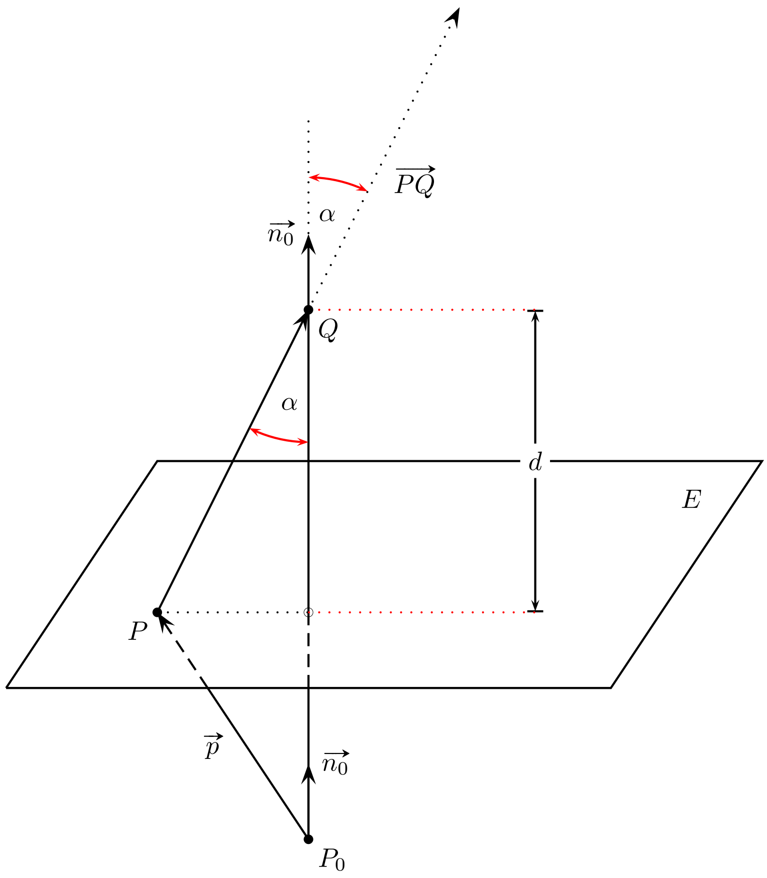

Abbildung 2: Zur Berechnung des Abstandes eines Punktes Q von der Ebene E

[2]Es gibt alternative Betrachtungen, da in der vorliegenden Darstellung der Abstand vom Nullpunkt bekannt ist und damit der Abstand eines Punktes durch einfache Differenzbildung mit der HNF berechnet werden kann.

2.1 Herleitung

Man betrachte die Abbildung 2 auf Seite 4. α sei der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\vec{n_0}$. Allgemein gilt für das Skalarprodukt

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n_0} = |\overrightarrow{PQ}| \cdot 1 \cdot \cos\alpha \tag{16}$$

Nun ist hier wiederum $\cos\alpha = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \dfrac{d}{|\overrightarrow{PQ}|}$, also $d = |\overrightarrow{PQ}| \cdot \cos\alpha$. Daher

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n_0} = d \tag{17}$$

Man wählt also zu $\vec{n_0}$ der Ebene E einen beliebigen Punkt P, der auf der Ebene liegt. Dann ist $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n_0}$ der Abstand des Punktes Q zur Ebene E (gemäß der Abbildung 2). Man schreibt das jetzt etwas um und erhält

$$\begin{align}
\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n_0} &= (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0} = d \tag{18}\\
&= \vec{n_0} \cdot \vec{q} - \underbrace{\vec{n_0} \cdot \vec{p}}_{c} = d \tag{19}\\
&= \vec{n_0} \cdot \vec{q} - c = d \tag{20}
\end{align}$$

Der Schritt in Gleichung (19) auf die nächste Zeile ergibt sich mit der vorgegebenen HNF der Ebenengleichung (siehe 2 auf Seite 4 bzw. Gleichung (15)), denn P ist ein Punkt der Ebene und (2) gilt für *alle* Punkte, die auf der Ebene liegen.

2.2 Zusammenfassung: Berechnung des Abstandes

Die Gleichung (20)

$$\vec{n_0} \cdot \vec{q} - c = d \tag{20}$$

kann man so interpretieren, dass die Koordinaten des Ortsvektors von Q in die HNF von E für $\vec{x}$ eingesetzt werden; das Ergebnis ist dann der Abstand von Q zur Ebene E.

Das gilt aber nur, wenn P_0 und Q auf **verschiedenen** Seiten der Ebene liegen (so wie in der Abbildung 2 auf Seite 4 anschaulich dargestellt). Andernfalls ist der Zahlenwert negativ. Der Abstand wird aber dem Betrage nach richtig angegeben. Falls sich $d < 0$ ergibt, liegen der Nullpunkt P_0 und der Punkt Q auf **derselben** Seite von E. Das negative Ergebnis hängt mit der Orientierung des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ in Bezug zu $\vec{n_0}$ zusammen. Dann ist der Winkel zwischen diesen Vektoren größer als 90° und das Skalarprodukt ist negativ. Eine genauere Betrachtung dieses Falles soll hier aber nicht weiter ausgeführt werden.

2.3 Beispiele

Gegeben sei die HNF einer Ebene E (siehe (10) auf Seite 3)

$$E: \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \left(\frac{5}{\sqrt{14}}\right) = 0$$

1. Bestimme den Abstand von $Q(2|1|9)$ von E.

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} - \left(\frac{5}{\sqrt{14}}\right) && (21) \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}} ((-2+3+18)-5) && (22) \\ &= \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \approx 3{,}74 && (23) \end{aligned}$$

Der Abstand beträgt $\sqrt{14} \approx 3{,}74$; P_0 und $Q(2|1|9)$ liegen auf *verschiedenen* Seiten der Ebene.

2. Bestimme den Abstand von $Q(2|1|-9)$ von E.

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} - \left(\frac{5}{\sqrt{14}}\right) && (24) \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}} ((-2+3-18)-5) && (25) \\ &= \frac{-22}{\sqrt{14}} = -\frac{11}{7} \cdot \sqrt{14} \approx -5{,}88 && (26) \end{aligned}$$

Der Abstand beträgt $-\frac{11}{7} \cdot \sqrt{14} \approx -5{,}88$; P_0 und $Q(2|1|-9)$ liegen auf *derselben* Seite der Ebene.