Einige Informationen zur natürlichen Exponentialfunktion

A. Tobias

24. Juni 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Eigenschaften von exp und ln **2**

1.1 Allgemeines – Klasse 10 2

1.2 Analytisches – Klasse 12 2

2 Graphische Darstellungen **3**

2.1 exp und ln 3

2.2 Verschiebungen und Spiegelungen 4

3 Differentialgleichungen **5**

3.1 Die homogene DGL 1. Ordnung 5

3.2 Die inhomogene DGL 1. Ordnung 6

1 Eigenschaften von exp und ln

1.1 Allgemeines – Klasse 10

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718281828 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \tag{1}$$

$$\exp(x) = e^x \tag{2}$$

$$e^x > 0 \quad \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$$0 < e^x < 1 \quad \text{, falls } x < 0 \tag{4}$$

$$e^x \geq 1 \quad \text{, falls } x \geq 0 \tag{5}$$

$$\ln(e^x) = x \;\text{ und }\; e^{\ln x} = \exp(\ln x) = x \quad \text{(Umkehrfunktionen)} \tag{6}$$

$$\ln x \geq 0 \quad \text{, falls } x \geq 1 \tag{7}$$

$$\ln x < 0 \quad \text{, falls } 0 < x < 1 \tag{8}$$

$$\ln x \text{ ist nicht definiert für } x \leq 0 \tag{9}$$

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \tag{10}$$

$$\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y) \tag{11}$$

1.2 Analytisches – Klasse 12

$$(e^x)' = e^x \tag{12}$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c \tag{13}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c \tag{15}$$

$$(e^{ax})' = a \cdot e^{ax} \quad \text{(Kettenregel)} \tag{16}$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + c \tag{17}$$

$$(\ln y(x))' = \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) \quad \text{(Kettenregel)} \tag{18}$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} \, dx = \ln|y(x)| + c \tag{19}$$

2 Graphische Darstellungen

2.1

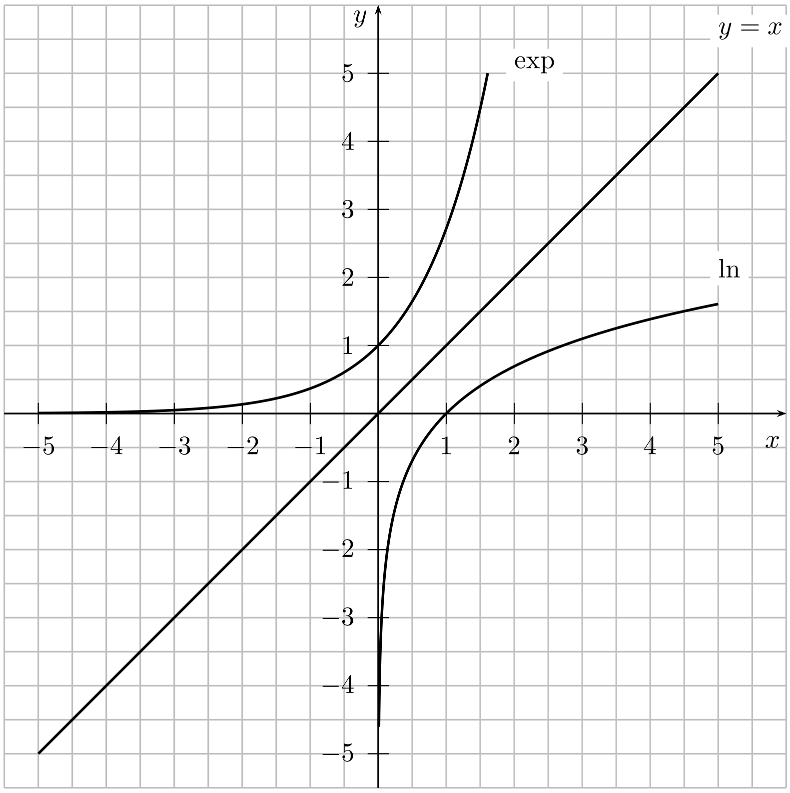

Abbildung 1: Graph der Funktionen exp und ln

2.2

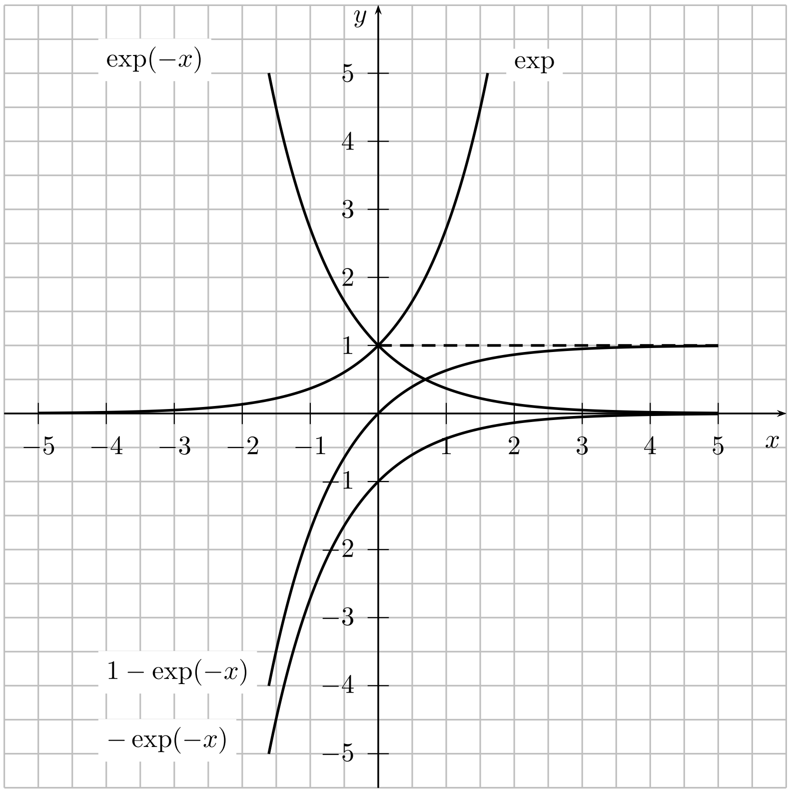

Abbildung 2: Aus e^x wird durch Spiegelung an der y-Achse e^{-x}; spiegelt man die letzte Funktion an der x-Achse, so erhät man $-e^{-x}$; verschiebt man diese Funktion um 1 nach oben, so ergibt sich $1 - e^{-x}$.

3 Differentialgleichungen

3.1 Die homogene DGL 1. Ordnung

Seien $a,b > 0$ und $y(x)$ eine auf $\mathbb{R}$ definierte diffenzierbare Funktion mit $y(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir wollen die DGL

$$ay' + by = 0 \tag{20}$$

lösen. Man erhält sofort

$$y' = -\frac{b}{a} \cdot y \tag{21}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \tag{22}$$

Den letzten Schritt nennt man „Separation der Variablen“. Durch Integration auf beiden Seiten der Gleichung erhält man (vergleiche (19))

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int -\frac{b}{a}\,dx \tag{23}$$

$$\ln|y| + k^* = \ln y + k^* = -\frac{b}{a} \cdot x \tag{24}$$

$$\ln y + \ln k = -\frac{b}{a} \cdot x \tag{25}$$

Dabei bedeutet k^* die Integrationskonstante von beiden Integrationen. Ferner setzt man zum besseren Rechnen $k^* = \ln k$ mit $k > 0$. Damit ist schließlich

$$\ln(y \cdot k) = -\frac{b}{a} \cdot x \tag{26}$$

$$\exp(\ln(y \cdot k)) = e^{-\frac{b}{a} \cdot x} \tag{27}$$

$$y \cdot k = e^{-\frac{b}{a} \cdot x} \tag{28}$$

$$y(x) = \frac{1}{k} \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x} \tag{29}$$

Die Konstante k wird aus den Anfangsbedingungen ermittelt.

Beispiel: Für $x = 0$ sei $y = y_0 > 0$:

$$y_0 = \frac{1}{k} \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot 0} = \frac{1}{k} \cdot 1 = \frac{1}{k} \tag{30}$$

3.2 Die inhomogene DGL 1. Ordnung

Seien $a,b,c > 0$, $y(x)$ eine auf $\mathbb{R}$ definierte diffenzierbare Funktion und $0 \leq y(x) < \frac{c}{b}$. Wir wollen die DGL

$$ay' + by = c$$

lösen. Man erhält sofort

$$\begin{aligned} y' &= \frac{c}{a} - \frac{b}{a} \cdot y && (31)\\ y' &= -\frac{b}{a} \cdot \left(y - \frac{c}{b}\right) && (32)\\ \frac{y'}{y - \frac{c}{b}} &= -\frac{b}{a} && (33) \end{aligned}$$

Der letzte Schritt dient wie oben zur „Separation der Variablen“. Durch Integration auf beiden Seiten der Gleichung erhält man – unter Berücksichtigung der Substitution $y^* = y - \frac{c}{b}$ und wegen $y^{*\prime} = y'$

$$\begin{aligned} \int \frac{y'}{y - \frac{c}{b}}\, dx &= \int -\frac{b}{a}\, dx && (34)\\ \int \frac{y^{*\prime}}{y^*}\, dx &= \int -\frac{b}{a}\, dx && (35)\\ \ln|y^*| + k^* &= -\frac{b}{a} \cdot x && (36)\\ \ln\left|\left(y - \frac{c}{b}\right)\right| + \ln k &= -\frac{b}{a} \cdot x && (37) \end{aligned}$$

Die letzte Zeile erhält man durch Resubstitution. Wieder bedeutet k^* die Integrationskonstante von beiden Integrationen und zum besseren Rechnen setzt man $k^* = \ln k$ mit $k > 0$. Berücksichtigt man noch $y - \frac{c}{b} < 0$, dann erhält man

$$\begin{aligned} \ln\left(\left(\frac{c}{b} - y\right) \cdot k\right) &= -\frac{b}{a} \cdot x && (38)\\ \exp\left(\ln\left(\left(\frac{c}{b} - y\right) \cdot k\right)\right) &= e^{-\frac{b}{a} \cdot x} && (39)\\ \left(\frac{c}{b} - y\right) \cdot k &= e^{-\frac{b}{a} \cdot x} && (40)\\ y(x) &= \frac{c}{b} - \frac{1}{k} \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x} && (41) \end{aligned}$$

Die Konstante k wird aus den Anfangsbedingungen ermittelt.

Beispiel: Für $x = 0$ sei $y = 0$:

$$0 = \frac{c}{b} - \frac{1}{k} \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot 0} = \frac{c}{b} - \frac{1}{k} \cdot 1 = \frac{c}{b} - \frac{1}{k} \qquad (42)$$

daher

$$\frac{1}{k} = \frac{c}{b} \qquad (43)$$