

Einige Informationen zur natürlichen Exponentialfunktion

A. Tobias

24. Juni 2020

[Startseite](#)

[Titelseite](#)

[Inhalt](#)



Seite 1 von 13

[Zurück](#)

[Vollbild](#)

[Schließen](#)

[Beenden](#)

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Eigenschaften von \exp und \ln | 3 |
| 1.1 | Allgemeines – Klasse 10 | 4 |
| 1.2 | Analytisches – Klasse 12 | 5 |
| 2 | Graphische Darstellungen | 6 |
| 3 | Differentialgleichungen | 9 |
| 3.1 | Die homogene DGL 1. Ordnung | 10 |
| 3.2 | Die inhomogene DGL 1. Ordnung | 12 |

Startseite

Titelseite

Inhalt



Seite 2 von 13

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

1. Eigenschaften von \exp und \ln

Startseite

Titelseite

Inhalt



Seite 3 von 13

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

1.1. Allgemeines – Klasse 10

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281828 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad (1)$$

$$\exp(x) = e^x \quad (2)$$

$$e^x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

$$0 < e^x < 1 \quad , \text{ falls } x < 0 \quad (4)$$

$$e^x \geq 1 \quad , \text{ falls } x \geq 0 \quad (5)$$

$$\ln(e^x) = x \quad \text{und} \quad e^{\ln x} = \exp(\ln x) = x \quad (\text{Umkehrfunktionen}) \quad (6)$$

$$\ln x \geq 0 \quad , \text{ falls } x \geq 1 \quad (7)$$

$$\ln x < 0 \quad , \text{ falls } 0 < x < 1 \quad (8)$$

$$\ln x \text{ ist nicht definiert für } x \leq 0 \quad (9)$$

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y} \quad (10)$$

$$\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y) \quad (11)$$

1.2. Analytisches – Klasse 12

$$(e^x)' = e^x \quad (12)$$

$$\int e^x dx = e^x + c \quad (13)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c \quad (15)$$

$$(e^{ax})' = a \cdot e^{ax} \quad (\text{Kettenregel}) \quad (16)$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + c \quad (17)$$

$$(\ln y(x))' = \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) \quad (\text{Kettenregel}) \quad (18)$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \ln |y(x)| + c \quad (19)$$

2. Graphische Darstellungen

Startseite

Titelseite

Inhalt



Seite 6 von 13

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

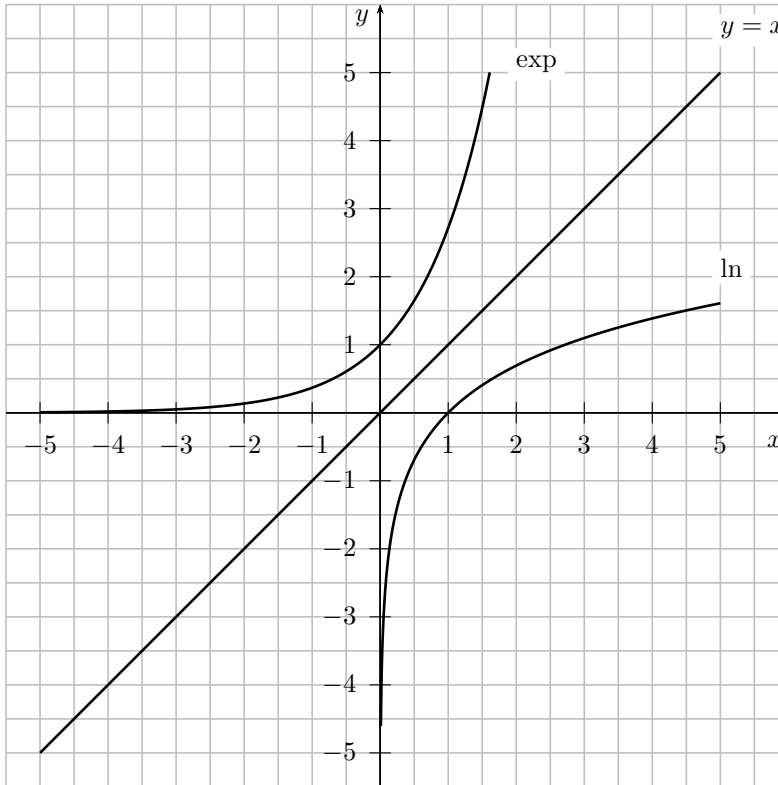


Abbildung 1: Graph der Funktionen exp und ln

[Startseite](#)

[Titelseite](#)

[Inhalt](#)

[◀](#)

[▶](#)

[◀](#)

[▶](#)

Seite 7 von 13

[Zurück](#)

[Vollbild](#)

[Schließen](#)

[Beenden](#)

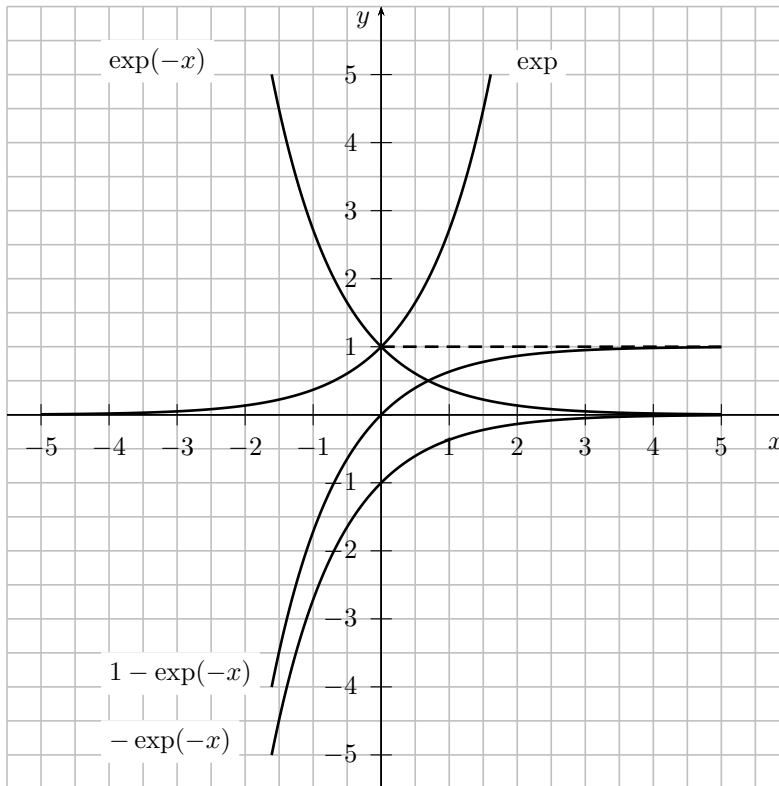


Abbildung 2: Graph der Funktionen exp und ln

Startseite

Titelseite

Inhalt

◀◀

▶▶

◀

▶

Seite 8 von 13

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

3. Differentialgleichungen

Startseite

Titelseite

Inhalt



Seite 9 von 13

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

3.1. Die homogene DGL 1. Ordnung

Seien $a, b > 0$ und $y(x)$ eine auf \mathbb{R} definierte diffenzierbare Funktion mit $y(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir wollen die DGL

$$ay' + by = 0 \quad (20)$$

lösen. Man erhält sofort

$$y' = -\frac{b}{a} \cdot y \quad (21)$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \quad (22)$$

Den letzten Schritt nennt man „Separation der Variablen“. Durch Integration auf beiden Seiten der Gleichung erhält man (vergleiche (19))

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int -\frac{b}{a} dx \quad (23)$$

$$\ln |y| + k^* = \ln y + k^* = -\frac{b}{a} \cdot x \quad (24)$$

$$\ln y + \ln k = -\frac{b}{a} \cdot x \quad (25)$$

Dabei bedeutet k^* die Integrationskonstante von beiden Integrationen. Ferner setzt man zum besseren Rechnen $k^* = \ln k$ mit $k > 0$. Damit ist schließlich

$$\ln(y \cdot k) = -\frac{b}{a} \cdot x \quad (26)$$

$$\exp(\ln(y \cdot k)) = e^{-\frac{b}{a} \cdot x} \quad (27)$$

$$y \cdot k = e^{-\frac{b}{a} \cdot x} \quad (28)$$

$$y(x) = \frac{1}{k} \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x} \quad (29)$$

Die Konstante k wird aus den Anfangsbedingungen ermittelt.

Beispiel: Für $x = 0$ sei $y = y_0 > 0$:

$$y_0 = \frac{1}{k} \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot 0} = \frac{1}{k} \cdot 1 = \frac{1}{k} \quad (30)$$

3.2. Die inhomogene DGL 1. Ordnung

Seien $a, b, c > 0$, $y(x)$ eine auf \mathbb{R} definierte diffenzierbare Funktion und $0 \leq y(x) < \frac{c}{b}$. Wir wollen die DGL

$$ay' + by = c$$

lösen. Man erhält sofort

$$y' = \frac{c}{a} - \frac{b}{a} \cdot y \quad (31)$$

$$y' = -\frac{b}{a} \cdot \left(y - \frac{c}{b}\right) \quad (32)$$

$$\frac{y'}{y - \frac{c}{b}} = -\frac{b}{a} \quad (33)$$

Der letzte Schritt dient wie auf Seite 10 zur „Separation der Variablen“. Durch Integration auf beiden Seiten der Gleichung erhält man – unter Berücksichtigung der Substitution $y^* = y - \frac{c}{b}$ und wegen $y^{*'} = y'$ sowie Gleichung (19)

$$\int \frac{y'}{y - \frac{c}{b}} dx = \int -\frac{b}{a} dx \quad (34)$$

$$\int \frac{y^{*'}}{y^*} dx = \int -\frac{b}{a} dx \quad (35)$$

$$\ln |y^*| + k^* = -\frac{b}{a} \cdot x \quad (36)$$

$$\ln \left| \left(y - \frac{c}{b}\right) \right| + \ln k = -\frac{b}{a} \cdot x \quad (37)$$



Die letzte Zeile erhält man durch Resubstitution. Wieder bedeutet k^* die Integrationskonstante von beiden Integrationen und zum besseren Rechnen setzt man $k^* = \ln k$ mit $k > 0$. Berücksichtigt man noch $y - \frac{c}{b} < 0$, dann erhält man

$$\ln \left(\left(\frac{c}{b} - y \right) \cdot k \right) = -\frac{b}{a} \cdot x \quad (38)$$

$$\exp \left(\ln \left(\left(\frac{c}{b} - y \right) \cdot k \right) \right) = e^{-\frac{b}{a} \cdot x} \quad (39)$$

$$\left(\frac{c}{b} - y \right) \cdot k = e^{-\frac{b}{a} \cdot x} \quad (40)$$

$$y(x) = \frac{c}{b} - \frac{1}{k} \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x} \quad (41)$$

Die Konstante k wird aus den Anfangsbedingungen ermittelt.

Beispiel: Für $x = 0$ sei $y = 0$:

$$0 = \frac{c}{b} - \frac{1}{k} \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot 0} = \frac{c}{b} - \frac{1}{k} \cdot 1 = \frac{c}{b} - \frac{1}{k} \quad (42)$$

daher

$$\frac{1}{k} = \frac{c}{b} \quad (43)$$