Die MAXWELLschen Gleichungen für beliebige el. und mg. Felder

Ingo Treunowski   Dominik Pyschny

November 2k

Inhaltsverzeichnis

1 Was wir schon wissen

Bereits bekannt sind uns die MAXWELLschen[1] Gleichungen für das zeitlich konstante el. und mg. Feld. Nachstehend sind die Gleichungen und ihre physikalischen Aussagen noch einmal zusammengefasst.

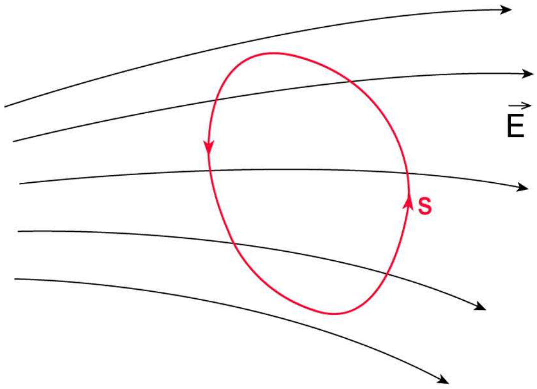

Abbildung 1:

$$\oint \vec{E}d\vec{s} = 0 \tag{1}$$

Das $\vec{E}$-Feld ist wirbelfrei. Die Feldlinien haben Anfang und Ende.

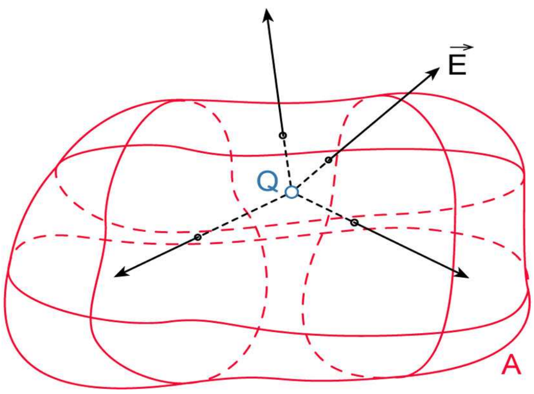

Abbildung 2:

$$\oint \vec{E}d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{2}$$

Das $\vec{E}$-Feld ist ein Quellenfeld. Quellen sind die Ladungen.

[1] James Clerk MAXWELL (1831-1879)

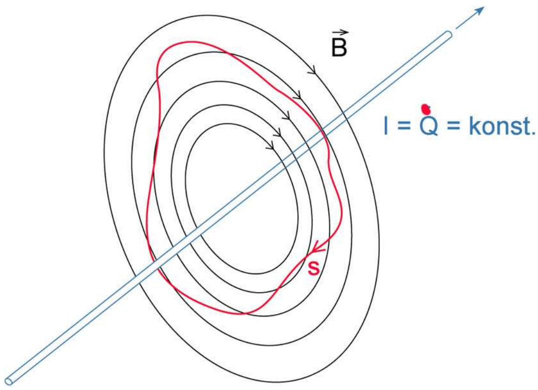

Abbildung 3:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \cdot I \tag{3}$$

Das $\vec{B}$-Feld ist ein Wirbelfeld. Wirbel sind die Ströme.

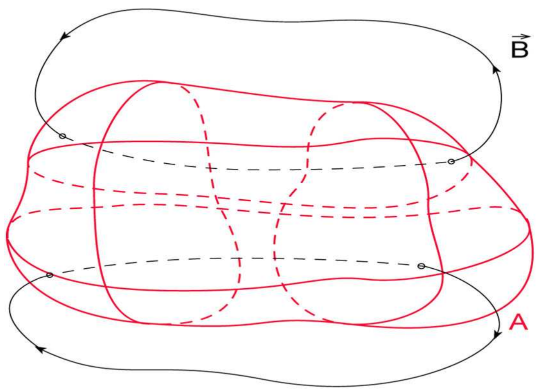

Abbildung 4:

$$\oint \vec{B} d\vec{A} = 0 \tag{4}$$

Das $\vec{B}$-Feld ist quellenfrei. Die Feldlinien sind geschlossen.

2 Die MAXWELLschen Gleichungen

2.1 Zeitabhängige mg. Felder

Es sollen nun die MAXWELLschen Gleichungen für beliebige inhomogene, el. und mg. Felder hergeleitet werden. Veränderliche Magnetfelder haben wir schon bei der Induktion kennengelernt. Nach dem Induktionsgesetz konnten wir die aus der zeitlichen Änderung des Magnetfeldes erzeugte Induktionsspannung berechnen: [2]

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\Phi} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\Phi = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}d\vec{A}$$

Ein beispielhaftes Experiment dazu war der THOMSONsche Ringversuch, bei dem durch ein Hineinführen oder Herausziehen eines Magneten im Ring eine Spannung induziert wurde, die den Strom fließen ließ.

Zu Beginn der Elektrizitätslehre haben wir Spannung als Potentialdifferenz zwischen Ladungen kennengelernt. Wenn nun eine Potentialdifferenz im Ring besteht, muss ein elektrisches Feld vorhanden sein, denn

$$\varphi(P) = -\int_{P_0}^{P} \vec{E}d\vec{s}$$

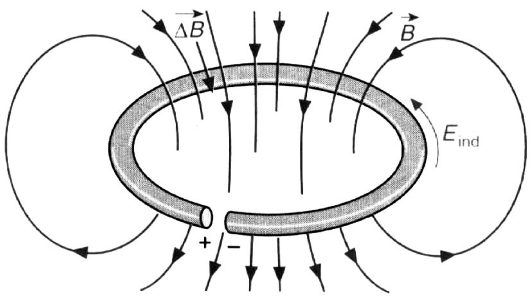

Abbildung 5: Der THOMSONsche Ringversuch

Halten wir also fest:

Erkenntnis 1
Eine zeitliche Änderung eines Magnetfeldes ruft ein elektrisches Feld hervor.

Der Induktionsstrom kommt dadurch zustande, dass die Ladungen sich bewegen, um die Potentialdifferenz auszugleichen. Da sich die Elektronen auf einer Kreisbahn bewegen, müssen die elektrischen Feldlinien geschlossen sein.

Erkenntnis 2
Es gibt auch geschlossene elektrische Feldlinien, d.h. es existieren auch elektrische Wirbelfelder. Diese werden durch die zeitliche Veränderung eines Magnetfeldes hervorgerufen.

Befände sich nun anstelle des Ringes Raum ohne Materie, d.h. der Magnet würde ohne Leiter hin- und herbewegt, so müsste auch hier ein el. Wirbelfeld entstehen. Denkt man sich nämlich den Leiter aus Probeladungen zusammengesetzt, so dienen die Probeladungen nur zum Nachweis des el. Feldes. Der Leiter ist also nur ein Indikator für das el. Feld. Wir denken, dass es auch ohne Leiter vorhanden wäre.

[2] Formelsammlung $\boxed{\text{E 42}}$

Erkenntnis 3
Die Entstehung des el. Wirbelfeldes ist also von der Anwesenheit von Materie unabhängig und hängt nur von der zeitlichen Veränderung dieses Magnetfeldes ab.

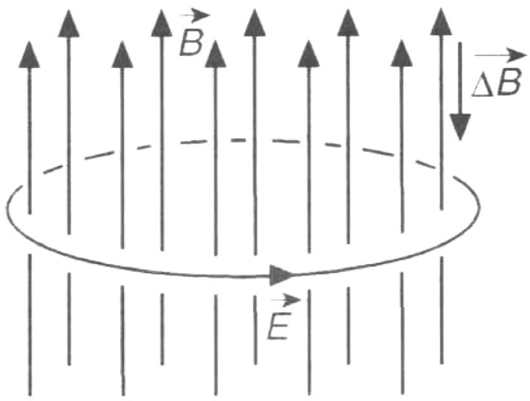

Abbildung 6: Ein elektrisches Wirbelfeld tritt immer dann auf, wenn ein zeitlich veränderliches Magnetfeld vorhanden ist.

Wir berechnen nun die Umlaufspannung im elektrischen Feld. Diese wird durch $\oint \vec{E}d\vec{s}$ angegeben und muss ungleich Null sein, da ein elektrisches Wirbelfeld vorliegt. Die Umlaufspannung wird aber gerade durch die Induktionsspannung $\left(U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt}\Phi\right)$ aufgebracht, so dass sich folgende Gleichung ergibt:

$$\oint \vec{E}d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\,\Phi \tag{5}$$

Damit hat man schließlich

$$(II) \qquad \oint \vec{E}d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}d\vec{A}$$

Dies ist die sogenannte II. MAXWELLsche Gleichung.

Diese Gleichung besagt: Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld ruft ein elektrisches Feld hervor. Wirbel ist der zeitlich veränderliche mg. Fluss. Es gibt geschlossene elektrische Feldlinien.

2.2 Zeitabhängige el. Felder

Untersuchen wir nun zunächst den Auf- und Entladevorgang eines Kondensators. Solange das el. Feld im Kondensator auf- bzw. abgebaut wird, fließt ein Strom. Während dieser Strom fließt - das el. Feld sich also ändert - , besteht um die Leiterstücke ein mg. Wirbelfeld. Nach unserer bisherigen Vorstellung dürfte zwischen den Platten des Kondensators kein Strom fließen und deshalb auch kein mg. Wirbelfeld um ihn herum existieren.

Nach MAXWELLs Vorstellung allerdings besteht das Magnetfeld auch innerhalb des Kondensators. Verständlich wird diese Auffassung durch die Betrachtung des Spezialfalls, dass sich zwischen den Kondensatorplatten ein Dielektrikum befindet (Abb. 7). Durch das Fließen des Ladestromes wird das Dielektrikum polarisiert, es findet also eine Ladungsverschiebung statt, es fließt ein *Verschiebungsstrom* I_V. Dieser Verschiebungsstrom tritt jedoch auch auf, wenn kein Dielektrikum vorhanden ist, sich etwa nur Luft oder überhaupt keine Materie zwischen den Platten befindet, da die Existenz des Magnetfeldes von der Anwesenheit von Materie unabhängig ist. Im Kondensator besteht also auch ein magnetisches Wirbelfeld.

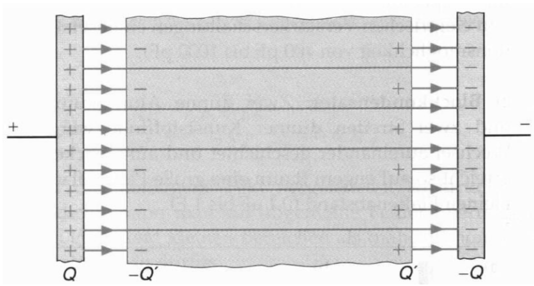

Abbildung 7: Ein Dielektrikum wird im Kondensator polarisiert.

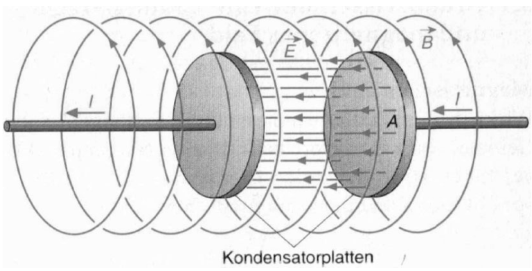

Abbildung 8: Das $\vec{B}$-Feld schließt auch den Raum zwischen den Platten ein.

Erkenntnis 4
Das magnetische Wirbelfeld endet nicht an den Kondensatorplatten, sondern auch das zeitlich veränderliche elektrische Feld zwischen den Platten ist von einem magnetischen Wirbelfeld umgeben (Abb. 8).

Es gilt dann:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \left(I + I_V\right) = \mu_0 \cdot I + \mu_0 \cdot I_V$$

Mit I_V gilt aber: $I_V = \dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$ hat man

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \cdot I + \mu_0 \cdot \frac{dQ}{dt} \tag{6}$$

$\mu_0 \cdot I$ beschreibt also die Enstehung des magnetischen Feld aus konstantem Strom und $\mu_0 \cdot \frac{dQ}{dt}$ den Aufbau des el. Feldes (d.h. die zeitliche Veränderung) durch Aufbringen von Ladungen. Beim Plattenkondensator gilt

$$Q = \epsilon_0 \cdot E \cdot A \,,$$

denn [3]

$$\begin{aligned} Q &= C \cdot U \\ &= C \cdot E \cdot d \\ &= \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d} \cdot E \cdot d \\ &= \epsilon_0 \cdot E \cdot A \end{aligned}$$

$E \cdot A$ gibt hier aber gerade den elektrischen Fluss an, da beim Plattenkondensator $\vec{E}$ und $\vec{A}$ in jedem Punkt gleichgerichtet sind. Allgemein gilt:

$$\Psi = \int \vec{E} d\vec{A}$$

also

$$Q = \epsilon_0 \cdot \Psi = \epsilon_0 \cdot \int \vec{E} d\vec{A} \tag{7}$$

Damit erhält man mit (7) und (6)):

$$(I) \qquad \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \cdot I + \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{d}{dt} \int \vec{E} d\vec{A}$$

Dies ist die I. MAXWELLsche Gleichung. Sie besagt: Ströme und zeitlich veränderliche elektrische Felder sind von magnetischen Wirbelfeldern umschlossen.

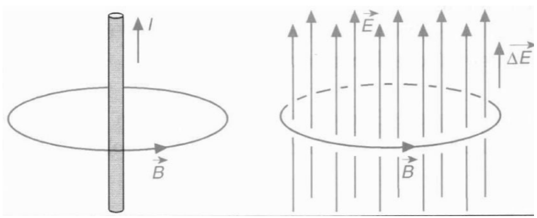

Abbildung 9: Wirbel sind einerseits die konstanten Ströme, andererseits der der zeitlich veränderliche elektrische Fluss.

3 Übersicht

Die Gleichungen (2) und (4) bzw. (*III*) und (*IV*) sagen etwas grundsätzliches über elektrische und magnetische Felder aus und gelten wie die Gleichungen (*I*) und (*II*) für beliebige elektrische und mg. Felder.

[3]Formelsammlung $\boxed{\text{E 19}}$, $\boxed{\text{E 12}}$ und $\boxed{\text{E 20}}$

$$(I) \qquad \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \cdot I + \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{d}{dt} \int \vec{E} d\vec{A}$$

Sowohl ein Leitungsstrom als auch ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld erzeugen ein Magnetfeld.

$$(II) \qquad \oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{A}$$

Ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld ruft ein elektrisches Feld hervor.

$$(III) \qquad \oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Das $\vec{E}$-Feld ist ein Quellenfeld. Quellen sind die Ladungen.

$$(IV) \qquad \oint \vec{B} d\vec{A} = 0$$

Das $\vec{B}$-Feld ist quellenfrei. Die Feldlinien sind geschlossen.

4 Folgerungen

Die Gleichungen (I) und (II) besagen, dass eine zeitliche Änderung des einen Feldes das jeweils andere Feld hervorruft, d.h. zeitlich veränderliche $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder bedingen sich gegenseitig. (Für zeitlich konstante Felder gilt weiterhin, dass sie sich ungestört überlagern.)

Maxwell konnte zeigen, dass sich durch eine Kopplung der beiden Felder, die senkrecht zueinander stehen, eine Welle bildet. Ebenso konnte er die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Wellen voraussagen, indem er die folgende bereits seit 1850 als Webersche Gleichung bekannte Beziehung

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

deutete. Die Übereinstimmung dieser Geschwindigkeit mit der Lichtgeschwindigkeit legte es nahe, Licht als elektromagnetische Welle zu sehen.

Seine Überlegungen zu elektromagnetischen Wellen führten Heinrich Hertz 1888 zur Entdeckung der Radiowellen. Dies bedeutete den experimentellen Nachweis von Maxwells Theorien.

5 Fazit

- *Ruhende* elektrische Ladungen erzeugen ein statisches elektrisches Feld.
- *Gleichförmig bewegte* elektrische Ladungen rufen zusätzlich ein magnetisches Feld hervor.
- *Beschleunigte elektrische* Ladungen strahlen, d.h. bauen ein $\vec{E}, \vec{B}$ - Feld auf.