Die Kugelschwebe

Jens Raffenberg, StRef Axel Tobias, StD

14. Juli 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Aufbau

In einer halbkreisförmigen Rinne ($R = 11\,\mathrm{cm}$) befinden sich eine Metall- und eine Holzkugel gleicher Größe.

2 Durchführung des Versuches und Beobachtungen

1. Die Rinne wird in langsame Rotation versetzt.

   Die Kugeln steigen nicht in der Rinne hoch und bleiben am untersten Punkt liegen.

2. Die Rinne wird in schnelle Rotation versetzt.

   Die Kugeln steigen an der gekrümmten Wand empor und bleiben in gleicher Höhe liegen

3. Die Rotationsfrequenz wird weiter erhöht.

   Bei höherer Rotationsfrequenz vergrößert sich auch die Steighöhe

3 Vektordiagramm

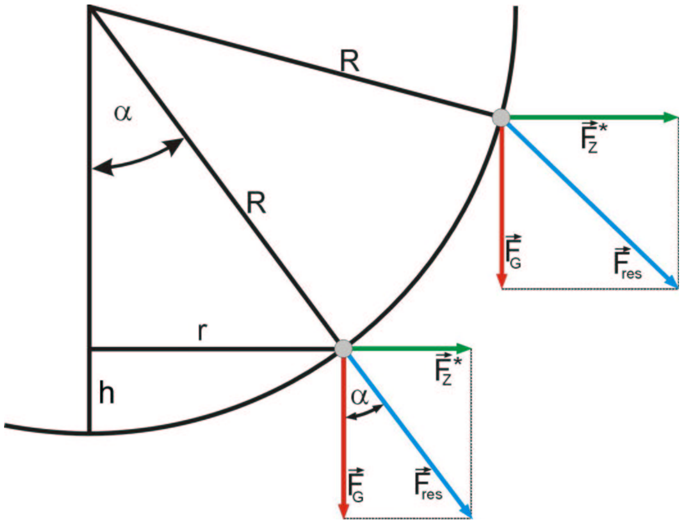

Abbildung 1:

Im unteren Teil der Abbildung 1 erkennt man, daß die Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z^*$ und die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ in ihrer vektoriellen Summe eine resultierende Kraft $\vec{F}_{res}$ ergeben, die senkrecht zur Tangente an den Kreis, also senkrecht zur Kreislinie steht. Die Kugel bleibt liegen. In Abbildung 2 erkennt man, daß sich die Anteile von $\vec{F}_Z^*$ und $\vec{F}_G$ in tangentialer Richtung an den Kreis gerade aufheben. Die Kugel ist kräftefrei.

Im oberen Teil der Abbildung 1 ist obengenannte Bedingung nicht erfüllt. Vergleiche dazu auch Abbildung 2.

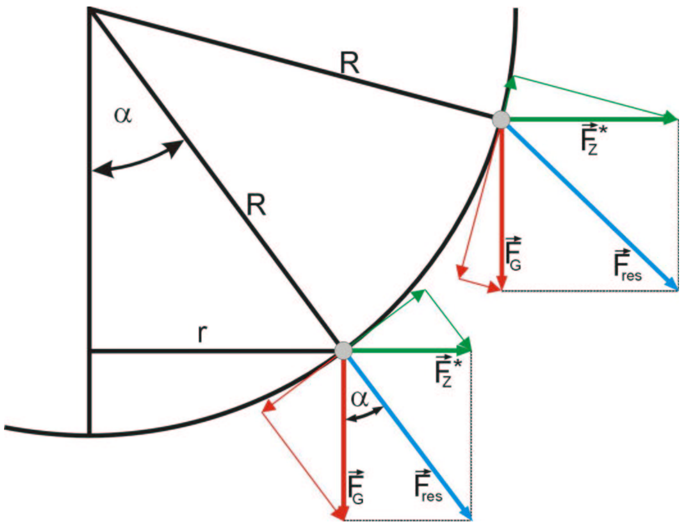

Abbildung 2:

4 Theorie

Hat die Kugel ihre Gleichgewichtslage erreicht, so ist das Verhältnis von Zentrifugal- und Gewichtskraft gleich dem Tangens des Winkels α, der von der Rotationsachse und der Verbindungsgeraden zwischen Kugelschalenmittelpunkt und Kugel eingeschlossen wird.

Es gilt also folgende Beziehung:

$$\tan\alpha = \frac{F_Z^*}{F_G} \tag{1}$$

Dividiert man die Gleichung durch die Masse m des Körpers und beachtet, daß $r = R \cdot \sin\alpha$ ist, so erhält man

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{m \cdot g} \qquad (2) \\ &= \frac{\omega^2 \cdot r}{g} \\ &= \frac{\omega^2 \cdot R \cdot \sin\alpha}{g} \end{aligned}$$

Nun gilt $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und folglich ist

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 \cdot R \cdot \sin\alpha}{g} \tag{3}$$

Offenbar hat die Gleichung 3 eine Lösung für $\alpha = 0$, denn $\dfrac{0}{1} = \dfrac{\omega^2 \cdot R \cdot 0}{g}$. Das heißt also, für $\alpha = 0$ ist ω beliebig wählbar; die Kugel bleibt stets im untersten Punkt liegen.

Sei daher $\alpha \neq 0$; dann ist $\sin\alpha \neq 0$ und aus (3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos\alpha} &= \frac{\omega^2 \cdot R}{g} \\ \cos\alpha &= \frac{g}{\omega^2 \cdot R} \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 \cdot R}\right) \qquad (4) \end{aligned}$$

Einer Winkelgeschwindigkeit ω ist also gemäß vorstehender Gleichung (4) genau ein Winkel α zugeordnet und man erkennt, daß bei wachsendem ω der Winkel α wächst, denn die Funktion arccos ist mit cos eine (streng monoton) fallende Funktion.

Ferner muß hier beachtet werden, daß arccos nur für Werte ≤ 1 definiert ist, d.h. also (4) ist nur definiert für

$$\frac{g}{\omega^2 \cdot R} \leq 1 \quad \text{oder} \quad \omega \geq \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{R}}}$$

Falls nun $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$, so hat man aus (4) die Gleichung

$$\alpha = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 \cdot R}\right) = \arccos\left(\frac{g}{\sqrt{\frac{g}{R}}^2 \cdot R}\right) = \arccos(1) = 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $(\alpha \neq 0)$. Es muß also $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$ gelten, damit die Kugel in der Rinne steigen kann.

Für den Fall $R = 11\,\mathrm{cm}$ ergibt sich die Bedingung $\omega > \sqrt{\frac{9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0,11\,\mathrm{m}}} = 9,44\,\mathrm{Hz}$ $(f > 1,5\,\mathrm{Hz})$.

Der Graph der Funktion $\alpha(\omega)$ - vergleiche (4) - ist in Abbildung 3 für $R = 11\,\mathrm{cm}$ wiedergegeben. Hier kann man sehen, daß die Kugel mit steigender Winkelgeschwindigkeit niemals den Winkel $\alpha = 90°$ erreichen kann, sich diesem Wert aber mit wachsendem ω immer mehr annähert. $\alpha = 90°$ ist eine Asymptote der Funktion $\alpha(\omega)$.

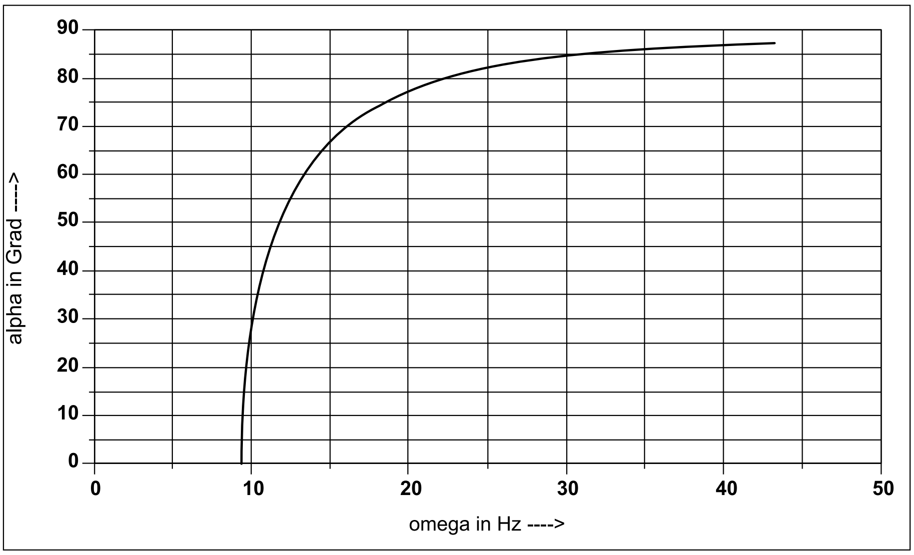

Abbildung 3:

Schließlich erkennt man aus (4), daß α unabhängig von der Masse m ist. Alle Kugeln steigen letztlich gleich hoch. Dabei kann man die Steighöhe h unter Verwendung von (4) berechnen zu

$$\begin{aligned} h &= R - R \cdot \cos\alpha \\ &= R - R \cdot \frac{g}{\omega^2 \cdot R} \\ &= R - \frac{g}{\omega^2} \end{aligned}$$