Komplexe Zahlen und Wechselstromwiderstände

Axel Tobias *

22.12.2000

*Ein besonderer Dank geht an Ingo Treunowski, der die Übertragung meines Manuskriptes in LaTeX durchgeführt hat ($^{\mathrm{tob}}$skript komplex.tex).

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen

1.1 Definition der komplexen Zahlen

Zahlen der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbf{R}$ und

$$\boxed{i^2 = -1} \tag{1}$$

heißen komplexe Zahlen $\mathbf{C}$. Offenbar ist $i \notin \mathbf{R}$, jedoch ist $i \in \mathbf{C}$ $(i = 0+1\cdot i)$.

1.2 Rechenregeln

Alle bekannten Rechenregeln gelten auch in $\mathbf{C}$; zu beachten ist nur Regel (1).

1. Addition:

   $(3 - 4i) + (6 + 7i) = 9 + 3i$

2. Subtraktion:

   $(3 + 4i) - (6 - 7i) = -3 + 11i$

3. Multiplikation:

   $(8 + 3i) \cdot (4 - 2i) = 32 - 16i + 12i - 6i^2 = 32 - 4i + 6 = 38 - 4i$

4. Division:

$$\begin{aligned} \frac{2+3i}{4+5i} &= \frac{(2+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{8-10i+12i-15i^2}{16-25i^2} = \frac{23+2i}{41} \\ &= \frac{23}{41} + \frac{2}{41} \cdot i \end{aligned}$$

5. Potenzen von i: $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$.

6. Kehrwert von i: Wegen $\frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$ gilt die Gleichung

$$\boxed{\frac{1}{i} = -i} \tag{2}$$

1.3 Geometrische Darstellung

Ist die Zahl $a + ib \in \mathbf{C}$ gegeben, so heißt $a \in \mathbf{R}$ der Realteil, $b \in \mathbf{R}$ der Imaginärteil der komplexen Zahl.

Da komplexe Zahlen durch die Angabe von 2 reellen Zahlen eindeutig bestimmt sind, lassen sie sich in der sogenannten Gaussschen Zahlenebene geometrisch darstellen. Die Zahl $2 + 3i$ entspricht also dem Vektor von $(0|0)$ nach $(2|3)$ im normalen Koordinatensystem.

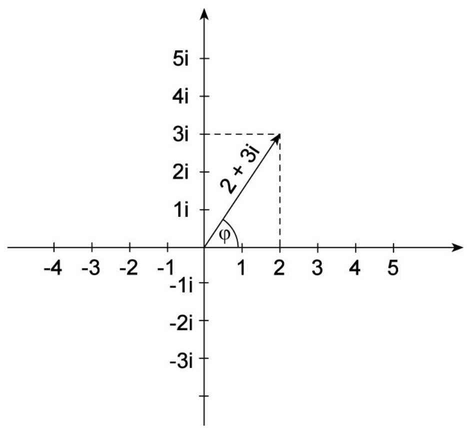


Abbildung 1: Die komplexe Zahlenebene

1.4 Der Betrag komplexer Zahlen

Nach dem Satz des Pythagoras gilt (vergleiche Abb. 1):

$$\boxed{|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}} \tag{3}$$

Also zum Beispiel

$$\begin{aligned} |2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} &= \sqrt{13} \\ |2-3i| = \sqrt{2^2+3^2} &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

1.5 Winkel

Für die Zahl $2+3i$ gilt (vergleiche Abb. 1) $\tan\varphi = \dfrac{3}{2}$.

Allgemein gilt daher:

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}}} \tag{4}$$

2 Wechselstromwiderstände und komplexe Zahlen

2.1 Allgemeines

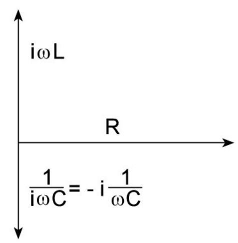


Abbildung 2: Wechselstromwiderstände und Phasenverschiebung

Ohmscher Widerstand	$\vec{R}_\Omega = R$ (reelle Zahl)	$\|\vec{R}_\Omega\| = R$
Induktiver Widerstand	$\vec{R}_L = i\omega L$	$\|\vec{R}_L\| = \omega L$
Kapazitiver Widerstand	$\vec{R}_C = \dfrac{1}{i\omega C} = -i\dfrac{1}{\omega C}$	$\|\vec{R}_C\| = \dfrac{1}{\omega C}$

Trick: Durch i bzw. $-i$ wird also sofort die Phasenverschiebung zwischen $U(t)$ und $I(t)$ an C bzw. L bezüglich R berücksichtigt (Abb. 2).

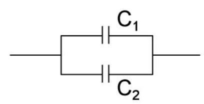
In der komplexen Schreibweise gelten jetzt die üblichen Gesetze zur Addition von Widerständen:

- Reihenschaltung:
$$\vec{R}_{\text{ges}} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$$

- Parallelschaltung:
$$\frac{1}{\vec{R}_{\text{ges}}} = \frac{1}{\vec{R}_1} + \frac{1}{\vec{R}_2}$$

Beachte, daß bei der letzten Gleichung die Division von komplexen Zahlen vorliegt und keine Division von Vektoren. Diese gibt es im allgemeinen nicht.

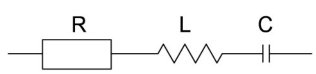
2.2 Parallelschaltung von zwei Kondensatoren



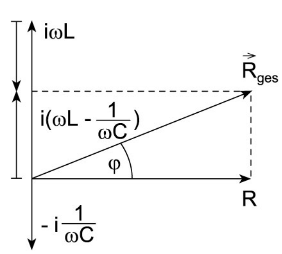
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\vec{R}_{\text{ges}}} &= \left(\frac{1}{i\omega C_1}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{i\omega C_2}\right)^{-1} = i(\omega C_1 + \omega C_2) \\
\vec{R}_{\text{ges}} &= \frac{1}{i(\omega(C_1 + C_2))} = -i\frac{1}{\omega(C_1 + C_2)} \\
\left|\vec{R}_{ges}\right| &= \sqrt{\frac{1}{\omega^2(C_1 + C_2)^2}} = \frac{1}{\omega(C_1 + C_2)}
\end{aligned}
$$

Setzt man nun $\frac{1}{\omega(C_1 + C_2)} = \frac{1}{\omega C_{\text{ges}}}$, so folgt $C_{\text{ges}} = C_1 + C_2$.

2.3 Reihenschaltung von Spule, Kondensator und Widerstand



$$
\begin{aligned}
\vec{R}_{\text{ges}} &= \vec{R}_\Omega + \vec{R}_C + \vec{R}_L = R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\
\left|\vec{R}_{\text{ges}}\right| &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\
\tan\varphi &= \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}
\end{aligned}
$$



2.4 Parallelschaltung von Spule, Kondensator und Widerstand

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\vec{R}_{\text{ges}}} &= \frac{1}{\vec{R}_\Omega} + \frac{1}{\vec{R}_L} + \frac{1}{\vec{R}_C} \\
&= \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{i\omega C}} \\
&= \frac{1}{R} - i\frac{1}{\omega L} + i\omega C \\
&= \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \\
\left|\frac{1}{\vec{R}_{\text{ges}}}\right| &= \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \\
R_{\text{ges}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \\
\tan\varphi &= -R \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = R \cdot \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)
\end{aligned}
$$

2.5 Parallelschaltung - etwas ausführlicher

Vergleiche 2.4:

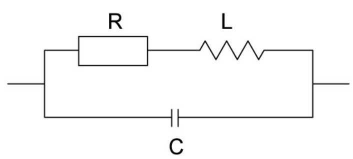
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\vec{R}_{\text{ges}}} &= \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \\
\vec{R}_{\text{ges}} &= \frac{1}{\frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{R} - i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{\frac{1}{R} - i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{R} - i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} - i \cdot \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Daraus erhält man mit den Gleichungen (3) und (4) von Seite 4

$$
\left|\vec{R}_{\text{ges}}\right| = \sqrt{\frac{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}{\left(\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right)^2}}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\text{ges}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \\
\tan\varphi &= \frac{-\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{\frac{1}{R}} = R \cdot \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)
\end{aligned}
$$

2.6 Parallelschaltung von Spule mit ohmschem Widerstand und Kondensator



$$
\begin{aligned}
\vec{R}_1 &= \vec{R}_\Omega + \vec{R}_L = R + i\omega L \\
\vec{R}_2 &= \frac{1}{i\omega C} \\
\frac{1}{\vec{R}_{\text{ges}}} &= \frac{1}{\vec{R}_1} + \frac{1}{\vec{R}_2} = \frac{\vec{R}_1 + \vec{R}_2}{\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2} \\
\vec{R}_{\text{ges}} &= \frac{\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2}{\vec{R}_1 + \vec{R}_2} = \frac{(R + i\omega L) \cdot \frac{1}{i\omega C}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} \\
&= \frac{-i\frac{R}{\omega C} + \frac{L}{C}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}
\end{aligned}
$$

Der Nenner wird durch Erweitern zur 3. binomischen Formel reell gemacht.

$$
\begin{aligned}
\vec{R}_{\text{ges}} &= \frac{\left(\frac{L}{C} - i\frac{R}{\omega C}\right)\left(R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{RL}{C} - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\frac{L}{C} - i\frac{R^2}{\omega C} - \frac{R}{\omega C}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{RL}{C} - \frac{R}{\omega C}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) - i\left(\frac{R^2}{\omega C} + \frac{L}{C}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\
|\vec{R}_{\text{ges}}| &= R_{\text{ges}} = \sqrt{\frac{\text{Realteil}^2 + \text{Imaginärteil}^2}{\text{Nenner}^2}}
\end{aligned}
$$

Der Zähler unter der Wurzel berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
& \frac{R^2L^2}{C^2} + \frac{R^2}{(\omega C)^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 - 2\frac{LR^2}{\omega C^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\
& \quad +2\frac{LR^2}{\omega C^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \frac{R^4}{(\omega C)^2} + \frac{L^2}{C^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \\
= \; & \frac{R^2L^2}{C^2} + \frac{R^4}{(\omega C)^2} + \left(\frac{R^2}{(\omega C)^2} + \frac{L^2}{C^2}\right)\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \\
= \; & \frac{1}{(\omega C)^2}\left(\omega^2R^2L^2 + R^4 + \left(R^2 + \omega^2L^2\right)\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right) \\
= \; & \frac{1}{(\omega C)^2}\left(\omega^2R^2L^2 + R^4 + R^2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + \omega^2L^2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right) \\
= \; & \frac{1}{(\omega C)^2}\left(R^2 + \omega^2L^2\right)\left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Zähler und Nenner lassen sich durch $R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$ kürzen, so daß man

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\omega C}\sqrt{\frac{R^2 + \omega^2L^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

erhält.

Die Berechnung von $\tan\varphi$ erfolgt wie in den oben vorgeführten Beispielen.